

Dinámica de Fluidos Geofísicos

Manuel Pulido
Departamento de Física,
Universidad Nacional del Nordeste
`pulido@unne.edu.ar`

20 Mar 11

Contenidos

Prólogo	3
1 Ecuaciones de movimiento	5
1.1 Introducción	5
1.1.1 Definición de un fluido	6
1.1.2 Estado de un fluido	7
1.1.3 Sistemas de coordenadas	7
1.1.4 Derivada material	8
1.2 Conservación de la masa	10
1.2.1 Conservación de la masa en un sistema Euleriano	10
1.2.2 Conservación de la masa para un elemento material	11
1.2.3 Definiciones relacionadas a la cinemática de un fluido	13
1.3 Conservación del momento	14
1.3.1 Fuerzas volumétricas y superficiales	14
1.3.2 Ecuaciones de conservación del momento de un fluido	16
1.4 Conservación de la energía	18
1.4.1 Ecuaciones que gobiernan un fluido	21
1.5 Condiciones en una interfase	22
1.6 Flujo de energía: conservación de la energía total	22
1.7 Invariante para un fluido ideal, estático: Teorema de Bernoulli	23
1.8 Fluidos en reposo: hidrostática	24
1.9 Ondas de sonido	24
1.10 Estabilidad	26
2 Ajuste bajo gravedad	22
2.1 Ondas de gravedad superficiales	22
2.2 Ecuaciones de ondas pandas	26
2.3 Ondas en dos fluidos superpuestos	28
2.4 Ondas de gravedad internas	30
2.5 Energía de las ondas de gravedad internas	32
2.6 Propagación de ondas: velocidad de grupo	33
2.7 Interacciones flujo medio-ondas	34
2.8 Mecanismos de generación de las ondas	35
2.8.1 Ondas shallow-water generadas por topografía	35

	3
2.8.2 Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	37
3 Ajuste bajo gravedad y rotación	39
3.1 Sistemas de coordenadas rotantes	39
3.1.1 Razón de cambio de un vector en coordenadas rotantes	39
3.1.2 Razón de cambio de la velocidad en un sistema rotante	40
3.2 Ecuación de conservación de momento sobre la tierra	40
3.3 Balance geostrofico	41

Prólogo

La historia del mundo y su cultura es parte de una continua evolución con el surgimiento, evolución y muerte de grandes paradigmas, quizás también resurgimiento de viejos paradigmas. Hace un par de siglos la humanidad tomó un fuerte compromiso desarrollista cuyo paradigma se cristalizó en una era industrial y luego en una tecnológica. Gran parte de los líderes mundiales, incluidas sus mentes mas brillantes, estuvieron comprometidos a llevar adelante este desarrollo mediante la creación de numerosos inventos que han transformado la forma de vivir de gran parte de la población, y especialmente de aquellos que tienen acceso al denominado consumo masivo.

Esta era industrial-tecnológica ha transformado también el planeta en el que vivimos. Por primera vez en la historia de nuestro planeta, no es la *naturaleza*, leáse las leyes de la física y la vida, quien ha gobernado la evolución del planeta, sino que esta evolución o transformación ha sido provocada por un agente “externo” con leyes de evolución propias. La transformación del planeta ha sido profunda y abarcativa, desde la explotación de los recursos naturales que se encuentran bajo tierra. Pasando al desmonte de enormes extensiones en todo el planeta destruyendo el habitat de plantas y animales que habían evolucionado desde la propia creación misma de la vida sobre el planeta. Hasta efectos no tan visibles como la alteración del espectro de radiación solar que llega a nuestra superficie (principal fuente de energía y requisito esencial de la vida), y la alteración misma de las componentes químicas del aire que respiramos.

El entender las consecuencias de la transformación realizada por el agente externo en el planeta es un nuevo desafío que la humanidad se enfrenta y que nunca antes en su historia habia surgido. Historicamente la evolución del planeta habia sido gobernada por las propias leyes de la naturaleza. El entendimiento de las consecuencias de la transformación es lo que se encuadra en el denominado “*cambio climático*”. Investigar el cambio climático consiste en estudiar la respuesta que tendrá el planeta (i.e. las leyes de la física) al forzado de este agente externo que es el “hombre”, para ser mas precisos el producido en la era industrial-tecnológica de nuestra civilización. A este agente externo lo llamamos, en general, forzado antropogénico.

El planeta está conformado por cuatro grandes componentes los océanos, la tierra, los hielos continentales y la atmósfera. Cada una de estas componentes tiene sus propias leyes de evolución, sin embargo lejos de ser componentes aisladas existen profundas interacciones entre ellas, que dan lugar lugar al “Sistema Tierra” (Earth system). El hombre en este esquema es una componente mas de lo que llamamos biosfera, esa pequeña capa que se encuentra sobre la superficie de la tierra con una profundidad de unas pocas decenas de metros de altura donde se desarrolla toda la vida sobre el planeta. Naturalmente, la biosfera es una componente mas del Sistema Tierra la cual interactua con las otras componentes. Sin embargo, estos pequeños seres vivos en las

últimas décadas, han talado grandes extensiones de las selvas, bosques de nuestro planeta y por otro lado han liberado enormes cantidades de gases de distintas componentes químicas, por lo que esta produciendo importantes alteraciones al equilibrio del “Sistema Tierra”.

Dado el surgimiento de este nuevo paradigma para el planeta, surgen numerosos interrogantes. ¿Por donde empezamos a investigar?, ¿cuales son nuestras bases del conocimiento sobre las cuales podemos construir respuestas a los interrogantes que presenta este nuevo paradigma?

El punto de partida es determinar cuales son las leyes físicas que gobiernan al planeta, y en particular a cada una de sus componentes y las leyes que gobiernan las interacciones entre las componentes del planeta. El segundo desafío que enfrentamos es determinar cual es la variabilidad natural del sistema tierra, es decir entender la evolución natural que ha tenido el planeta (sin el forzado antropogénico). Superando estos dos escalones estaremos en condiciones de plantearnos el tercer escalón, que consiste en encontrar respuestas a la siguiente pregunta: ¿cuál es la respuesta que tendrán las leyes físicas del planeta al forzado antropogénico?.

En este texto, asociado a la asignatura del mismo nombre, solo se pretende alcanzar el primer escalón. El texto comienza en forma meticulosa a plantear las leyes físicas que gobiernan al océano y la atmósfera, los denominados fluidos “geofísicos”. Las leyes que derivan en las ecuaciones de Navier-Stokes serán planteadas asumiendo que el lector no tiene ningun conocimiento previo de la mecánica de los fluidos. Por lo que en esta primera parte, el texto se concentra en exponer los principios básicos y los problemas mas sencillos abordados en la mecánica de los fluidos.

En la segunda unidad se planteará aspectos mas complejos de la dinámica de un fluido. El principio básico que nos regirá para su estudio es como actua el fluido ante un forzante externo (teórico e idealizado) siendo este principio consecuente con el objetivo final que nos hemos planteado. En la tercera unidad, pondremos los pies sobre la tierra, en particular la tierra es un sistema rotante por lo que tendremos que evaluar como se comporta un fluido que está en un sistema rotante y por lo tanto no-inercial, con la consecuente existencia de fuerzas centrífuga y de Coriolis.

En la cuarta unidad vamos a estudiar mecanismos de disipación en un fluido a través de la viscosidad, esto da lugar a la presencia de capas límites. Las capas límites se encuentran comúnmente en el contorno de un fluido real con una superficie rígida. Las características básicas de las capas límites de la atmósfera y el océano son introducidas. Algunos aspectos de la turbulencia en las capas límites son abordados. Finalmente en la quinta unidad nos concentramos en algunos de los mecanismos que generan la variabilidad en un fluido, las distintas componentes espectrales que se observan en la atmósfera y en el océano, son disparadas por inestabilidades. Éstas demarcan la transición entre un flujo laminar y un flujo caótico o turbulento. Es decir, son la transición entre regímenes lineales y no-lineales. Dando lugar a transferencias de energía entre las distintas componentes espectrales de un sistema.

Esperamos en el futuro en otros dos textos, y sus posibles asignaturas asociadas, emprender los otros dos escalones de este camino que se ha propuesto, que nos permitan plantear en forma completa el desafío que conlleva entender como está el hombre cambiando al planeta en esta era industrial-tecnológica y como responderá éste a tales cambios.

Manuel Pulido
Corrientes, Marzo 2012

Capítulo 1

Ecuaciones de movimiento

1.1 Introducción

En Mecánica clásica se estudia las leyes que gobiernan el movimiento de partículas y de cuerpos rígidos (sólidos).

¿Cuáles son las leyes de movimiento para los otros dos estados de la materia: líquidos y gases?

La mecánica de los fluidos es el área de la Física que se dedica al estudio de los movimientos de gases y líquidos. En particular en esta materia aplicaremos los conceptos de la mecánica de los fluidos a el océano y la atmósfera. En todo momento nos concentraremos en los aspectos principales de un fluido para luego aplicarlos a casos específicos.

La alta complejidad que revisten los problemas físicos de escalas intermedia es que por su propio planteo están compuestos por un gran número de elementos físicos, partículas, con fuertes interacciones entre sí. Otro de los grandes desafíos que tienen estas ramas de la física es que por tener una escala intermedia a menudo es necesario tener en cuenta aspectos moleculares o efectos relativistas. Sin embargo en este curso nos concentraremos en los aspectos clásicos de la mecánica de los fluidos por lo que no tendremos en cuenta estos efectos.

Otra dificultad de la mecánica de los fluidos radica en que el sistema de ecuaciones que la describe, las ecuaciones de Navier-Stokes, son altamente no lineales. El problema es muy complejo y no existen soluciones generales como en otros campos de la física (e.g. electromagnetismo). Para encontrar soluciones a problemas particulares se requieren ingeniosas aproximaciones y usualmente la utilización de métodos matemáticos no-lineales. Alternativamente existen numerosos esfuerzos que se concentran en el modelado numérico para describir aspectos no lineales de los fluidos.

Las no linealidades de la mecánica de fluidos son intrínsecas al problema, esto motivó investigaciones que se enfocaron en sistemas no lineales simples que se derivan de aproximar las ecuaciones de la mecánica de fluidos. El estudio de sistemas no lineales atmosféricos simples desarrollado por

Lorenz, 1963: Deterministic nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141.

encontró en un sistema dinámico no lineal muy simple la existencia de fuertes sensibilidades a

las condiciones iniciales que resultaron en la existencia de una estructura de la solución en el espacio del estado muy compleja, conocida actualmente como el atractor de Lorenz. Este fue el trabajo pionero en el área de investigación en lo que se denomina “caos”.

Existen aun numerosos problemas de la mecánica de fluidos que permanecen abiertos, cubriendo el rango desde cuestiones muy teóricas como la existencia y unicidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, el cual ha sido seleccionado por el Clay Mathematics Institute dentro de los 8 problemas actuales mas importantes de la matemática¹. También existen problemas abiertos en el campo de la mecánica de fluidos aplicados tales como la turbulencia y el cambio climático. Estos dos problemas fueron determinados en el año 2000 por el American Institute of Physics como dos de los grandes desafíos de la Física (en un grupo de diez “Grand Challenges”) para el próximo milenio.

Durante el curso de la asignatura se intentará que el estudiante tenga una visión lo suficientemente general que cubra desde los conceptos básicos de la mecánica de fluidos, pasando por ondas en fluidos, fluidos rotantes, inestabilidades, hasta cubrir los conceptos de turbulencia y cambio climático.

1.1.1 Definición de un fluido

Comencemos por la definición de un fluido:

Los fluidos se definen por dos propiedades básicas:

Continuidad: Los fluidos tienen una estructura continua es decir que las cantidades asociadas con la materia tales como la masa y el momento contenidas en un pequeño volumen están esparcidas uniformemente dentro de éste (en lugar de estar concentradas en porciones específicas).

Deformabilidad: La aplicación de fuerzas a un fluido producirá deformaciones. Esto no significa que el fluido no ofrezca resistencia, puede ofrecerla pero no puede prevenir la deformación.

La hipótesis de continuidad permite que propiedades del fluido tales como la densidad, velocidad, o temperatura sean funciones continuas de la posición y el tiempo por lo que en cada punto espacio-temporal tendremos definidos estos campos.

Los escépticos seguramente dirán que ésta hipótesis asume que la materia es infinitamente divisible, sin embargo dirán los gases y líquidos están compuestos de moléculas y por lo tanto no se puede pensar que formen un material continuo. ¿Deberíamos entonces desechar la hipótesis de continuidad? La respuesta es NO. Dado que las variables que estamos interesados en describir son puramente macroscópicas y de hecho solo están definidas para una gran cantidad de partículas elementales, la hipótesis está plenamente justificada. De hecho, la hipótesis de continuidad ha sido incluso verificada experimentalmente.

En todo momento debemos tener en cuenta que cuando mencionamos a un *elemento de fluido*, en realidad, hacemos referencia a un pequeño volumen que contiene muchas moléculas

¹Paradójicamente tres de los mas reconocidos matemáticos argentinos, Alberto Calderón, Eduardo Zarantonello y Luis Caffarelli, han realizado importantes contribuciones en el área. Luis Caffarelli demostró un importante teorema acerca de la unicidad de soluciones débiles a una versión simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes sin condiciones de contorno y sobre cuan suaves son estas soluciones.

por lo cual puede considerarse como un continuo. Aun cuando hablamos de una partícula de fluido el concepto de macroscopicamente pequeño pero microscópicamente grande continua siendo aplicable, en otras palabras, una partícula de fluido estará compuesta por un número lo suficientemente grande de moléculas como para que pueda ser considerada que están esparcidas uniformemente en dicha partícula.

1.1.2 Estado de un fluido

¿Cómo determinamos completamente el estado dinámico de un fluido?

Por un lado necesitamos el vector velocidad el cual denotaremos por

$$\mathbf{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

Para determinar el estado termodinámico, sabemos que son necesarias dos variables termodinámicas independientes (ver Sears o Callen), por ejemplo presión p y densidad ρ .

Supongamos entonces una región D en un espacio 3D que está llena de un fluido y $\mathbf{x}$ es un punto donde se encuentra un elemento de fluido $\mathbf{a}$ al tiempo t . Este elemento de fluido realiza una trayectoria a lo largo del tiempo, el vector velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ denota a la velocidad del elemento de fluido localizado en $\mathbf{x}$ a tiempo t , este vector es tangente a la trayectoria que traza el elemento de fluido. En cada punto de nuestro dominio tenemos definido un vector velocidad dado por

$$\mathbf{u} = \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} \quad (1.1)$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ es el vector desplazamiento, es decir la diferencia $\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)$ donde $\mathbf{X}(t)$ es la posición de la partícula que se encuentra en $\mathbf{x}$ en el tiempo t , luego la partícula se desplaza a $\mathbf{X}(t + \Delta t)$ en el tiempo $t + \Delta t$.

Las variables termodinámicas están relacionadas entre ellas, en particular la ecuación de estado $f(p, T, \rho) = 0$ relaciona la presión, temperatura y densidad. En el caso de un gas ideal la ecuación de estado es $p = \rho RT$ donde R es la constante de los gases. Como se ve en termodinámica, hay un teorema que demuestra que con 2 variables independientes entre sí queda determinado el estado del sistema termodinámico.

El estado del fluido queda determinado entonces por 5 variables. A los fines de determinar la evolución de estas 5 variables necesitamos 5 leyes de conservación. Éstas son la conservación del momento en sus 3 componentes, la conservación de la masa y la conservación de la energía.

Nos proponemos entonces determinar estas leyes de conservación para un fluido. Previamente necesitamos definir los posibles sistemas de coordenadas en los cuales estudiaremos el movimiento.

1.1.3 Sistemas de coordenadas

Supongamos que elegimos una partícula de fluido y le ponemos el rótulo $\mathbf{a}$ de tal manera que la podamos seguir en su movimiento, ésta partícula trazará una trayectoria definida por

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t; \mathbf{a})$$

Si a cada partícula del fluido le ponemos rótulos distintos entonces podríamos seguir a cada una de ellas. En particular, una buena elección del rótulo podría ser la posición inicial en la que se encuentra la partícula, es decir, $\mathbf{a} = \mathbf{X}(t_0)$.

Esto es lo que se denomina una descripción *Lagrangiana* del fluido, es decir seguimos a las partículas a lo largo de su movimiento, en este caso las variables independientes son $\mathbf{a}$ y t mientras la variable dependiente es la posición a un dado tiempo $\mathbf{X}(t; \mathbf{a})$.

En un típico experimento de laboratorio lo que se hace es tirar una sustancia similar al humo en el fluido que se quiere estudiar la dinámica, y luego se fotografía cada microsegundo para seguir el movimiento de las partículas del humo con la cámara, es decir, lo que estaríamos viendo es el movimiento en un sistema Lagrangiano del fluido.

En la descripción *euleriana* el vector velocidad está definido en cada punto para cada instante de tiempo en la forma de un *campo* vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. En este caso $\mathbf{x}$ y t son las variables independientes y $\mathbf{u}$ es la variable dependiente. Notar que aquí $\mathbf{x}$ se refiere a una posición fija en el espacio, mientras $\mathbf{X}(\mathbf{a})$ se refiere a la posición de la partícula $\mathbf{a}$ en el tiempo t . Un sistema Euleriano, entonces, está fijo en el espacio mientras las partículas de fluido están fluyendo en cada instante de tiempo para un dado punto. Para distintos tiempos se estará describiendo las propiedades de partículas de fluido distintas que ocasionalmente se ubican en la posición $\mathbf{x}$.

La relación que existe entre estas dos formulaciones es que para un dado tiempo las velocidades en un dado punto donde se localiza una dada partícula deben ser las mismas, *viz.* (*viz=videlicet* significa “es decir”),

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} = \mathbf{X}, t) \quad (1.2)$$

Definimos entonces un *elemento material de fluido* como un conjunto de partículas de fluido que puede ser localizado espacialmente y al que lo podemos seguir durante su trayectoria. El conjunto de partículas que forma el elemento permanecerán dentro del elemento a lo largo de su evolución sin mezclarse con su entorno es decir que asumimos no hay difusión. De esta manera la superficie frontera del elemento de fluido queda bien definida en todo momento².

1.1.4 Derivada material

En general las leyes del movimiento y las relaciones termodinámicas vienen dadas para un elemento de fluido en un marco Lagrangiano, pero a la vez en muchos problemas resulta mas práctico trabajar en un marco Euleriano. Para relacionar a los sistemas de referencia necesitamos una relación entre la razón de cambio de un dado elemento de fluido a la razón de cambio de un campo expresado en un sistema fijo.

Consideremos una función que depende de $\mathbf{x}$ y de t : $\Psi(\mathbf{x}, t)$, queremos determinar como cambia esta función Euleriana, Ψ , con el tiempo siguiendo el movimiento del fluido; la cual representa alguna propiedad de un elemento material de fluido (*e.g.* masa, energía).

Cuando consideramos el cambio temporal de una dada cantidad en un sistema Euleriano debemos tener en cuenta que las variables de posición también dependen del tiempo. El cambio total en el tiempo será dado por la diferencial total de $\Psi(\mathbf{x}, t)$:

$$\delta\Psi = \partial_t\Psi\delta t + \partial_x\Psi\delta x + \partial_y\Psi\delta y + \partial_z\Psi\delta z \quad (1.3)$$

²En fluidos geofísicos se suele denominar *parcela* al elemento de fluido, compuesto por aire o agua de mar que no se mezcla con su entorno.

dividiendo por un diferencial de tiempo a (1.3) se tiene

$$\frac{\delta\psi}{\delta t} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\partial_t x + \dots \quad (1.4)$$

Teniendo en cuenta que es a lo largo del movimiento entonces se cumple la relación dada en (1.2), $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}$, luego

$$\frac{D\psi}{Dt} \equiv \partial_t\psi + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\psi. \quad (1.5)$$

Este operador al cual denotamos por $\frac{D\psi}{Dt}$ es llamado “derivada material”, y fue introducido por Stokes. Nótese que hemos denotado a esta derivada por D/Dt para denotar que es el cambio *material* en el tiempo. Llamamos al primer término del RHS (Right Hand Side, término del lado derecho de la ecuación) ∂_t derivada temporal local mientras el segundo término $\mathbf{u} \cdot \nabla$ será denominado término *advectivo* (En algunos textos especialmente los antiguos se le suele denominar término *convectivo* sin embargo aquí nos reservamos el concepto de *convectivo* para denotar a los procesos que resultan de tener un fluido mas liviano debajo de uno mas pesado como veremos mas adelante).

En el caso que una propiedad tenga derivada material nula, $D_t\psi = 0$, lo que sucede es que la cantidad no cambia a lo largo del movimiento, es decir no cambia siguiendo a un elemento material. Esto no quiere decir que la cantidad no puede cambiar temporalmente, el cambio temporal que se produce en un punto fijo, $\partial_t\psi$ estará en el caso de $D_t\psi = 0$, viene dado por el transporte $-\mathbf{u} \cdot \nabla\psi$.

Ejercicio 1.1: Suponga que tenemos una propiedad ψ en 1D que varía linealmente con la posición $\psi = Ax$ para un tiempo fijo y además sabemos que $\partial_t\psi = B$. Calcule el cambio total de ψ si el fluido tiene una velocidad u constante conocida. ¿Qué condición debe cumplir la velocidad u para que la ψ se conserve para un elemento material (i.e. la derivada material sea nula)?

1.2 Conservación de la masa

1.2.1 Conservación de la masa en un sistema Euleriano

Dado que sabemos que la masa es una cantidad conservada, queremos determinar cual es la ley de conservación de la masa en un sistema Euleriano.

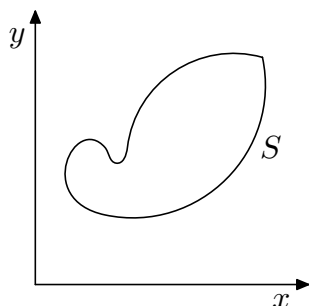


Figura 1.1: Volumen fijo V_E encerrado por la superficie S_E .

Supongamos un volumen fijo V_E cuyo contorno es la superficie S como se observa en Fig. 1.1. Como la masa de los elementos materiales se conserva significa que los cambios de masa en V_E solo se pueden producir por un flujo de masa (elementos materiales) hacia el exterior o desde el exterior. Si pensamos en una “caja” y en movimiento 1D, entonces el cambio de la masa en la “caja” de sección transversal a en un Δt viene dado por el flujo de masa que entró a la caja $\rho_1 u_1 a \Delta t$ menos el que salió de la caja $\rho_2 u_2 a \Delta t$:

$$\Delta M = \rho_1 u_1 a \Delta t - \rho_2 u_2 a \Delta t \quad (1.6)$$

En general el cambio de la masa total en un volumen viene dado por el flujo neto entrante al volumen a través de la superficie que lo delimita:

$$d_t \int_{V_E} \rho dV_E = - \int_{S_E} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}_E \quad (1.7)$$

El volumen en consideración está fijo (notar que era una hipótesis) y usando el teorema de la divergencia

$$\int_{V_E} [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] dV_E = 0$$

Teniendo en cuenta que este volumen fijo es arbitrario

$$\boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.} \quad (1.8)$$

Esta ecuación, (1.8), es la expresión diferencial de la conservación de la masa.

Dada una distribución de velocidades y una densidad inicial, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y $\rho(\mathbf{x}, t_0)$, (1.8) nos dice cual será la evolución de ρ . Dada una $\rho(\mathbf{x}, t)$, (1.8) nos restringe o limita las velocidades (aunque no las define).

Definición *Fluido incomprensible*: Un fluido incomprensible es aquel cuya densidad del flujo no es afectada por los cambios de la presión; además si la conducción molecular puede despreciarse se satisface la ecuación

$$D_t \rho = 0 \quad (1.9)$$

Es decir que en el caso de un fluido incomprensible, la densidad siguiendo el movimiento material no cambia.

Utilizando la definición de derivada material (1.5), la ecuación de conservación de la masa (1.8) puede ser reescrita como

$$\rho^{-1} D_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.10)$$

Entonces se deduce que para un fluido incomprensible, (1.9), se satisface la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.11)$$

Es decir, para fluidos incomprensibles, *viz* de densidad constante para un elemento material, la divergencia de la velocidad debe ser nula. Si hubiera divergencia no nula se podría producir el vacío o introduciríamos mas masa de la que entra en el volumen del elemento contradiciendo el hecho de que es incomprensible.

1.2.2 Conservación de la masa para un elemento material

Si el elemento material está conformado por un conjunto de elementos materiales de fluido en todo momento esto significa que la masa del elemento material debe ser constante

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (1.12)$$

donde $M = \int_{V_L} \rho dV_L$ es la masa del elemento material, V_L es un volumen Lagrangiano (un conjunto de elementos materiales que se sigue con el tiempo).

Luego se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = 0 \quad (1.13)$$

Dado que el volumen evoluciona con el tiempo debemos hacer una transformación de coordenadas de tal manera de transformar este volumen Lagrangiano a un volumen fijo (Euleriano) independiente del tiempo.

Sea $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ la trayectoria del elemento de fluido que se encuentra en $\mathbf{x}$ al tiempo t^3 . Luego

$$\int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_E} \rho(\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV_E \quad (1.14)$$

donde J es el Jacobiano de la transformación de un sistema Lagrangiano a un sistema Euleriano. Utilizando (1.14) podemos derivar temporalmente el integrando,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_E} \partial_t \rho(\mathbf{Y}, t) J dV_E + \int_{V_E} \rho \partial_t J dV_E \quad (1.15)$$

Notar que $\partial_t \rho(\mathbf{Y}, t) = D_t \rho(\mathbf{x}, t)$ ya que es a lo largo del movimiento.

El volumen del elemento cambia con el tiempo dado que éste es un elemento material. Este volumen no es un volumen fijo en el espacio sino que es un volumen cuya superficie que lo rodea está formado y definido por las mismas partículas de fluido. En este sentido, la superficie que encierra al elemento material no es atravesada por partículas, es decir no existe flujo entrante ni saliente.

Ejercicio 1.2: Demostrar que $\partial_t J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}$. Físicamente esto significa que el cambio del volumen *material* δV_L con el tiempo es $\frac{d\delta V_L}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \delta V_L$. No utilizar al principio de conservación de la masa en la demostración.

Reemplazando en (1.15) el resultado del ejercicio 1.2.2, $\partial_t J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}$, resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_E} \partial_t \rho(\mathbf{Y}, t) J dV_E + \int_{V_E} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} J dV_E \quad (1.16)$$

³El campo vectorial $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ debe ser interpretado como la posición en un tiempo arbitrario pero fijo, digamos t_0 , que tiene el elemento de fluido que se encuentra en $\mathbf{x}$ al tiempo t .

Esto nos permite retroceder y transformar a (1.16) de un sistema Euleriano a un sistema Lagrangiano nuevamente,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_L} \rho dV_L = \int_{V_L} (D_t \rho(\mathbf{x}, t) + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}) dV_L \quad (1.17)$$

Teniendo en cuenta (1.13) y como el volumen material es arbitrario, en el sentido que la cantidad de partículas que definen al elemento de volumen son arbitrarias, aunque el volumen definido evoluciona, resulta que

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.18)$$

esta ecuación es efectivamente la misma ley diferencial que se obtuvo mediante la derivación Euleriana en 1.2.1.

Ejercicio 1.3: Demostrar el teorema de transporte que establece que una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva (por unidad de masa) es $\gamma(\mathbf{x}, t)$ satisface

$$d_t \int_{V_L} \rho \gamma dV_L = \int_{V_L} \rho D_t \gamma dV_L \quad (1.19)$$

teniendo en cuenta que la densidad ρ satisface la ecuación de conservación de la masa.

Ejercicio 1.4: Demostrar usando un marco Lagrangiano que si tenemos una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva es $\gamma(\mathbf{x}, t)$ (e.g. salinidad, energía, momento por unidad de masa) que posee una fuente por unidad de volumen y tiempo, Q , entonces la evolución de dicha cantidad es gobernada por la ley:

$$\rho D_t \gamma = Q \quad (1.20)$$

Ayuda: obtenga primero una expresión integral para el cambio total de la propiedad extensiva en un sistema Lagrangiano.

Ejercicio 1.5: Demostrar usando un marco Euleriano, en forma similar a como se demostró la conservación de la masa en un marco Euleriano en Sección 1.2.1, que la cantidad γ satisface:

$$\partial_t(\rho \gamma) + \nabla \cdot (\rho \gamma \mathbf{u}) = Q \quad (1.21)$$

Ejercicio 1.6: Demostrar que las leyes de conservación para la cantidad intensiva, γ , cuya fuente es Q ,

$$\begin{aligned} \rho D_t \gamma &= Q \quad y \\ \partial_t(\rho \gamma) + \nabla \cdot (\rho \gamma \mathbf{u}) &= Q, \end{aligned}$$

son equivalentes si la masa se conserva.

1.2.3 Definiciones relacionadas a la cinemática de un fluido

Campo constante: Un campo que es independiente del tiempo y de la posición.

Campo uniforme: Un campo que es independiente de la posición pero no necesariamente del tiempo.

Flujo estático (steady flow): Las variables que describen al flujo son independientes del tiempo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. En el caso de ondas en general se denominan ondas estáticas a aquellas en las cuales las cantidades medias (e.g. la envolvente) son independientes del tiempo y por lo tanto los patrones son independientes del tiempo, i.e. no hay propagación. La velocidad y otras variables de estas ondas pueden depender del tiempo.

Ondas estacionarias (stationary waves): son aquellas que tienen velocidad de fase 0 y por lo tanto la frecuencia $\omega = 0$.⁴

Línea de corriente (streamline): En todo momento la línea de corriente es paralela al vector velocidad. Para flujos no-estacionarios las líneas de corriente deben calcularse para cada t . La forma de obtenerlas es a través de las relaciones

$$\frac{dx}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{x}, t)}.$$

Si el flujo es estático, las trayectorias de los elementos de fluido, $\mathbf{X}(t)$, son equivalentes a las líneas de corriente.

Función de corriente (stream function) En los casos en que tenemos un flujo 2D y el fluido es incomprensible; existe una relación entre las componentes de la velocidad, pudiendo entonces expresar a éstas, (u, v) en función de una función escalar ψ , denominada función de corriente. El campo de velocidad puede ser obtenido por las relaciones:

$$u = \partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi. \quad (1.22)$$

Es decir matematicamente se tiene inicialmente dos variables dependientes u, v sin embargo éstas están relacionadas entre sí a través de la relación, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, entonces podemos expresar directamente el problema en una sola variable dependiente ψ la cual satisface a través de su definición (1.22) trivialmente la relación $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Es decir, si reemplazamos estas igualdades en la ecuación de conservación de la masa para un fluido incomprensible (recordar que éstos satisfacen que la divergencia de la velocidad es nula),

$$\partial_{xy} \psi - \partial_{yx} \psi = 0$$

entonces si ψ es doblemente diferenciable y viene dada por (1.22) se cumple idénticamente la ecuación de conservación de la masa. En otras palabras, dada cualquier función escalar ψ ; ésta satisface la conservación de la masa supuesto la velocidad sea definida por (1.22).

⁴Hay una aparente contradicción en las definiciones ya que algo estacionario nos da idea de falta de movimiento o propagación en un patrón. En la literatura los términos *stationary* y *steady* se utilizan en forma bastante confusa incluso como sinónimos. En esta monografía se tendrá en cuenta las definiciones, claras y precisas, dadas en el libro de Lighthill.

Ejercicio 1.7: Demostrar que las líneas de corriente en un flujo son el conjunto de funciones de corriente constantes.

Ejercicio 1.8: Demostrar que el flujo de masa de un fluido con $\rho = cte$ en un contorno cerrado es nulo. A partir de esta demostración fundamente que la función ψ únicamente depende de los puntos extremos y no del camino.

1.3 Conservación del momento

De la segunda ley de Newton surge otra ecuación de conservación para un fluido. Esta ley establece que una fuerza neta, $\sum \mathbf{F}$, sobre una partícula produce un cambio de momento, denotado por $\mathbf{p}$,⁵ dado por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F} \quad (1.23)$$

Veamos como se traduce esta ley de conservación para un fluido. Para esto comencemos analizando la naturaleza de las fuerzas que se ejercen sobre un elemento de fluido. Éstas pueden ser divididas en dos tipos, volumétricas y superficiales.

1.3.1 Fuerzas volumétricas y superficiales

Las *fuerzas volumétricas* son fuerzas de largo alcance que penetran al fluido y afectan a todos los elementos de éste. Ejemplos de estas fuerzas son la fuerza de gravedad, la fuerza electromagnética y las fuerzas ficticias resultantes de sistemas no-inerciales.

Estas fuerzas son proporcionales al tamaño del elemento de fluido, es decir son una propiedad intensiva (por unidad de masa) entonces la fuerza total actuando sobre un elemento de fluido de masa δm es

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \delta m = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \rho \delta V$$

donde ρ es la densidad de masa y δV es el volumen del elemento de fluido. En el caso del campo gravitacional terrestre la fuerza de gravedad por unidad de masa es

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}$$

Por otro lado se encuentran las *fuerzas superficiales*, que son fuerzas de corto alcance y deben su existencia a las interacciones moleculares por lo que su intensidad decrece rápidamente con la distancia y solo son apreciables cuando hay contacto entre los elementos. Estas fuerzas son producidas por transporte de momento a través del contorno por moléculas migrantes.

⁵A lo largo de esta tesis usaremos el término “momento” para referirnos a la cantidad $\mathbf{p}$ aun cuando en español este mas difundido el término cantidad de movimiento. Esto se toma de esta manera para facilitar y abreviar los conceptos derivados del momento en fluidos, tales como flujo de momento, densidad de momento, etc.

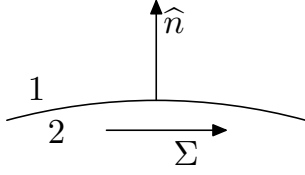


Figura 1.2: Fuerza superficial por unidad de área Σ ejercida por el medio 1 sobre el medio 2.

Si las fuerzas superficiales están afectando al contorno entre dos medios, éstas no pueden penetrar el fluido debido a su naturaleza y por lo tanto sus efectos son solo sentidos por una fina capa alrededor del contorno. En otras palabras, estas fuerzas son proporcionales al área. Entonces la fuerza superficial total viene dada por

$$\Sigma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) \delta s$$

donde Σ es la fuerza superficial por unidad de área y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie que apunta desde el medio 2 al medio 1. En este caso se interpreta a Σ como la fuerza ejercida por 1 sobre 2.

Tensor de stress

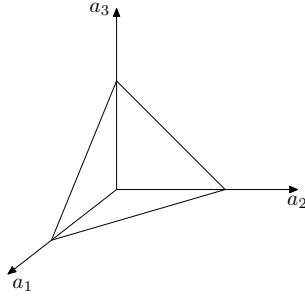


Figura 1.3: Tetraedro cuyas caras tienen como versores normales a $\hat{a}_i$ y a $\hat{\mathbf{n}}$.

La fuerza que apunta en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ es la opuesta a la de la dirección de $-\hat{\mathbf{n}}$ por lo que

$$\Sigma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) = -\Sigma(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) \quad (1.24)$$

donde se ha utilizado el principio de acción y reacción. Es decir que $\Sigma(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)$ es la fuerza ejercida por 2 sobre 1, y por el principio de acción y reacción, ésta es de igual magnitud y sentido inverso a la fuerza ejercida por 1 sobre 2, $\Sigma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)$. Por lo tanto, de (1.24) se tiene que Σ es una función impar de $\hat{\mathbf{n}}$.

Dada una dirección normal podemos armar un tetraedro cuyas caras tienen vectores normales a una terna de versores ortogonales entre sí ($\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$) y a $\hat{\mathbf{n}}$, como se muestra en figura 1.3.

Luego la fuerza superficial que se ejerce sobre el tetraedro es

$$\mathbf{f}_s = \Sigma(\hat{\mathbf{n}})\delta S + \Sigma(-\hat{a}_1)\delta S_1 + \Sigma(-\hat{a}_2)\delta S_2 + \Sigma(-\hat{a}_3)\delta S_3 \quad (1.25)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al tetraedro podemos obtener una ecuación de movimiento de la forma:

$$\rho D_t \mathbf{u} \delta V = \rho \mathbf{F} \delta V + \mathbf{f}_s \quad (1.26)$$

Para que esta ecuación valga cuando $\delta V \rightarrow 0$ se necesita que $\mathbf{f}_s = 0$ ya que este término tiende a 0 con δs por lo que tiende mas lentamente que los otros dos. Luego se deduce que

$$\Sigma(\hat{\mathbf{n}})\delta S = \Sigma(\hat{a}_1)\delta S_1 + \Sigma(\hat{a}_2)\delta S_2 + \Sigma(\hat{a}_3)\delta S_3 \quad (1.27)$$

Si se tiene en cuenta que

$$\delta S_i = \hat{a}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta S = a_{ij} n_j \delta S. \quad (1.28)$$

⁶En lo que sigue alternaremos la notación de vectores y la notación de subíndices para representar una componente arbitraria. En este último caso se asume que si existe repetición de un subíndice se está denotando implícitamente a la suma de todas las componentes, e.g. $u_i v_i = \sum_{j=1}^N u_j v_j$, ésta es conocida como notación de Einstein.

se deduce que la componente i -ésima de $\Sigma(\hat{n})$ es

$$\Sigma_i(\hat{n})\delta S = \underbrace{(\Sigma_i(\hat{a}_1)a_{1j} + \Sigma_i(\hat{a}_2)a_{2j} + \Sigma_i(\hat{a}_3)a_{3j})}_{\sigma_{ij}} n_j \delta S \quad (1.29)$$

El término encerrado por la llave, σ_{ij} es independiente de los ejes elegidos y por lo tanto es un tensor de segundo rango denominado *tensor de stress*.

Este tensor de stress es independiente de la dirección normal $\hat{n}$ por lo que se utilizará para expresar las fuerzas superficiales. Como veremos mas adelante sus componentes no son todas independientes, en particular es un tensor simétrico, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

1.3.2 Ecuaciones de conservación del momento de un fluido

La razón de cambio del momento de un elemento material de volumen V_L es dada por

$$d_t \int_{V_L} \rho \mathbf{u} dV_L = \int_{V_L} \rho D_t \mathbf{u} dV_L \quad (1.30)$$

donde se ha utilizado el teorema de transporte (ejercicio 1.2.2).

Como se vio en la sección anterior las fuerzas que producirán cambios de momento son de dos naturalezas:

i) Fuerzas volumétricas cuyo aporte es

$$\int_{V_L} \rho \mathbf{F} dV_L.$$

ii) Fuerzas superficiales en la dirección i caracterizadas por

$$\int_{S_L} \sigma_{ij} n_j ds_L = \int_{V_L} \partial_{x_j} \sigma_{ij} dV_L$$

donde σ_{ij} es el tensor de stress (forzado) y en el RHS hemos usado el teorema de Gauss.

Luego el balance de momento, rememorando a la segunda ley de Newton (1.23), viene dado por

$$\int_{V_L} \rho D_t u_i dV_L = \int_{V_L} \rho F_i dV_L + \int_{V_L} \partial_{x_j} \sigma_{ij} dV_L \quad (1.31)$$

Dado que el volumen en (1.31) es arbitrario, se obtiene la forma diferencial

$$\rho D_t u_i = \rho F_i + \partial_{x_j} \sigma_{ij}. \quad (1.32)$$

El tensor de stress lo reescribimos en la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}. \quad (1.33)$$

donde σ'_{ij} es el tensor de stress viscoso. Las componentes diagonales del tensor de stress representan el forzado normal en la correspondiente dirección.

Si el fluido está en reposo no existe el forzado por viscosidad $\sigma'_{ij} = 0$ y el tensor de stress tiene la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (1.34)$$

donde p es la presión estática del fluido. En principio su origen es puramente mecánico y no es claro como está relacionado a la variable termodinámica p , la cual únicamente puede ser definida cuando tenemos equilibrio termodinámico.

En un fluido en reposo el tensor de stress es isotrópico cualquier conjunto de ejes ortogonales son ejes principales y solo tiene componentes normales, no hay componentes tangenciales.

En general, extendemos el concepto de la presión estática y definimos para un fluido en movimiento a p por

$$p \equiv -\frac{1}{3}\sigma_{ii}. \quad (1.35)$$

La forma general de la conservación de momento es entonces

$$\rho D_t u_i = \rho F_i - \partial_{x_i} p + \partial_{x_j} \sigma'_{ij} \quad (1.36)$$

Debemos encontrar una expresión que relacione el tensor de stress viscoso con la velocidad para cerrar las ecuaciones. Existen dos tipos de movimientos para los cuales σ'_{ij} se debe anular, por un lado para movimiento uniforme, es decir con velocidad constante. En este caso las distintas capas del fluido no se producen fricción entre sí y por lo tanto el tensor debe ser 0. El segundo tipo de movimiento es un fluido rotando como un cuerpo rígido, tampoco hay en este caso movimientos entre sí de los elementos del fluido y por lo tanto no hay fricción.

Si la fricción se anula para un caso de movimiento uniforme esto quiere decir que σ'_{ij} no depende de la velocidad directamente, entonces el primer término que debería influir es el gradiente de velocidad. En la forma mas general posible se debería tener que:

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} \partial_{x_l} u_k \quad (1.37)$$

hemos despreciado todos las posibles dependencias de mayor orden en el tensor de stress y solo nos quedamos con la dependencia lineal al gradiente de velocidad. Teniendo en cuenta la restricción que σ'_{ij} se debe anular para rotación rígida se deduce que la forma mas general del tensor de stress debe ser:

$$\sigma'_{ij} = \eta(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_{x_k} u_k) + \zeta\delta_{ij}\partial_{x_k} u_k \quad (1.38)$$

donde η es el coeficiente de viscosidad (dinámica) y ζ es la viscosidad segunda. También se puede encontrar el coeficiente de viscosidad cinemática definido por $\nu = \eta/\rho$.

Ejercicio 1.9: Asumiendo que el fluido es isotrópico y por tanto η y ζ no dependen de la posición demuestre que el gradiente del tensor de stress viscoso se reduce a:

$$\partial_{x_j} \sigma'_{ij} = \eta \partial_{x_j}^2 u_i + \left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right) \partial_{x_i} (\partial_{x_k} u_k) \quad (1.39)$$

A partir de esta ecuación, (1.39), asuma ahora que el fluido es incomprensible y demuestre que en este caso la expresión del tensor de stress viscoso es

$$\partial_{x_j} \sigma'_{ij} = \eta \nabla^2 u_i \quad (1.40)$$

Utilizando la expresión obtenida en el ejercicio, (1.39), y reemplazando en la ecuación de conservación del momento, (1.36) obtenemos, la archi-conocida ecuación de Navier-Stokes

$$\boxed{\rho D_t u_i = \rho F_i - \partial_{x_i} p + \eta \partial_{x_j x_j}^2 u_i + \left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right) \partial_{x_i} (\partial_{x_k} u_k)} \quad (1.41)$$

Esta es la ecuación de conservación del momento de un fluido mas completa. En general en la atmósfera y el océano el tensor de stress viscoso es despreciable cuando se compara con los otros términos. Sin embargo tiene un rol fundamental en la disipación de energía mecánica. Otro aspecto de la disipación que no puede ser obviado son las consecuencias de la viscosidad en las condiciones de contorno.

En el caso en que el fluido pueda ser considerado incomprensible; usando (1.40) la ecuación de momento resultante se reduce a

$$\boxed{\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}} \quad (1.42)$$

En el caso en que la viscosidad sea despreciable las ecuaciones de momento toman la forma

$$\boxed{\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}} \quad (1.43)$$

esta ecuación se conoce como ecuación de Euler.

Entonces tenemos tres posibles ecuaciones de conservación del momento (1.41) a (1.43); de acuerdo al tipo de fluido y al régimen que se encuentre se optará por una u otra.

1.4 Conservación de la energía

Los cambios en la energía interna de un elemento material de fluido vienen dados por la primera ley de la termodinámica, la cual establece que:

Los cambios en la energía interna $\Delta \varepsilon$ son dados por el trabajo hecho por el entorno sobre el elemento de fluido mas el calor transferido por el medio hacia el elemento

$$\Delta \varepsilon = \delta W + \delta Q \quad (1.44)$$

Comencemos por identificar el trabajo hecho por el entorno sobre el elemento de fluido para esto calculemos la razón de trabajo total realizado sobre el elemento material de fluido. Este trabajo por unidad de tiempo está compuesto por el realizado por las fuerzas volumétricas,

$$\int \rho u_i F_i dV \quad (1.45)$$

y el realizado por las fuerzas superficiales

$$\int u_i \sigma_{ij} n_j ds = \int \partial_{x_j} (u_i \sigma_{ij}) dV \quad (1.46)$$

La suma de (1.45) y (1.46) es el trabajo total realizado sobre el sistema, sin embargo no todo este trabajo es invertido en cambiar la energía interna $\Delta \varepsilon$, en realidad una parte de este trabajo se gasta en cambiar la energía cinética del fluido. Para determinar que parte del trabajo se gasta en

energía cinética utilizamos las ecuaciones de movimiento. Multiplicando la i -ésima componente de (1.32) por u_i e integrando en volumen se obtiene

$$\int \frac{1}{2} \rho D_t u_i^2 dV = \int (\rho u_i F_i + u_i \partial_{x_j} \sigma_{ij}) dV. \quad (1.47)$$

Luego restando del trabajo total, (1.45)+(1.46), el trabajo que se gasta en cambiar la energía cinética, (1.47), se deduce que la parte del trabajo invertida en cambiar la energía interna es

$$d_t W = \int \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i dV. \quad (1.48)$$

Las transferencias de calor δQ por el entorno sobre el elemento de fluido pueden ser debidas a conducción molecular o radiación. La conducción molecular existe aun cuando el fluido esta en reposo, es un proceso puramente molecular.

El calor entregado por el entorno a través de conducción de calor molecular depende del gradiente de temperatura en la superficie

$$\int \kappa \nabla T \cdot d\mathbf{s} = \int \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV \quad (1.49)$$

donde κ es el coeficiente de conductividad térmica cuyas unidades son $J(Km)^{-1}$.

El gradiente de temperatura es el único término que aporta a las transferencias de calor ya que asumimos que la temperatura es continua en la superficie, *viz* existe un estado de equilibrio, además las contribuciones de derivadas superiores son consideradas despreciables.

La variación de energía interna en el elemento de fluido sumando las contribuciones del término del trabajo (1.48), la conducción molecular, (1.49) y la radiación $\mathbf{F}_{rad}$ viene dada por

$$\frac{d}{dt} \int \rho \varepsilon dV = - \int \rho \varepsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int \{ \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \mathbf{F}_{rad} \} dV \quad (1.50)$$

En forma diferencial,

$$\rho D_t \varepsilon = \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.51)$$

Utilizando el ejercicio 1.2.2, la evolución de la energía interna se puede expresar como

$$\boxed{\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad})} \quad (1.52)$$

Ésta es la ecuación diferencial mas general de la evolución de la energía interna.

Si la viscosidad del fluido puede ser considerada despreciable $\sigma'_{ij} \approx 0$,

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.53)$$

Si además podemos despreciar la conducción molecular y la radiación

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.54)$$

Este tipo de flujos en los cuales las transferencias de calor pueden ser consideradas despreciables y que además es no-viscoso se denominan flujos isentrópicos ya que la entropía en un elemento material de fluido se conserva. Los fluidos en los cuales la viscosidad y las transferencias de calor sean despreciables serán llamados *fluidos ideales*.

La ecuación (1.54) nos dice que la única fuente de energía interna para un fluido ideal es el trabajo de compresión realizado a través de la presión por el entorno sobre el elemento de fluido. Luego para fluidos incomprensibles la energía interna se conserva, todo el trabajo realizado sobre el elemento de fluido es invertido en cambiar la energía cinética.

Nótese que se esta mencionando por un lado aproximaciones para ciertos tipos de fluidos y por otro lado aproximaciones para ciertos tipos de flujo, esto no es equivalente, un fluido real puede tener en algún límite ciertas aproximaciones que en otros no son válidas, o en ciertas regiones comportarse de una forma y en otras regiones de otra forma. Por ejemplo en la atmósfera en ciertas capas donde la radiación es absorbida la hipótesis de movimientos adiabáticos no es válida sin embargo en otras capas el movimiento puede ser considerado adiabático por lo que en estos casos es apropiada la denominación de flujos isentrópicos mientras no lo es la denominación de fluido ideal.

Ejercicio 1.10: Partiendo de la primera ley de la termodinámica y asumiendo que el flujo es isentrópico deduzca (1.54).

Si asumimos que el movimiento es isentrópico en lugar de utilizar la ecuación de conservación de la energía interna (1.54) se puede utilizar directamente la conservación de la entropía, es decir

$$D_t s = 0 \quad (1.55)$$

donde s es la entropía por unidad de masa. Escribiendo esa ecuación en otra forma

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) = 0 \quad (1.56)$$

Como veremos mas adelante en la atmósfera y en el océano se suelen utilizar variables alternativas a la entropía que también son conservadas para movimientos isentrópicos.

Tanto (1.54) como (1.56) pueden ser utilizadas como ecuaciones de conservación de la energía para fluidos ideales. ¿Hemos entonces cerrado el sistema de ecuaciones?. No. Para esto necesitamos una ecuación de estado que nos relacione ε o s con ρ y p .

En el caso de la atmósfera es una buena aproximación asumir que ésta es un gas ideal y por lo tanto vale la ecuación de estado:

$$p = \rho R T \quad (1.57)$$

donde R es la constante del gas, la cual se relaciona a la constante universal del gas por $R = R_u/m$; m es el peso molecular promedio del gas. Para aire seco resulta $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Si queremos calcular como varía la temperatura en función de la presión para flujo isentrópico escribamos el diferencial de la entropía en función de las variables T y p ,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (1.58)$$

Teniendo en cuenta las relaciones $c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$ y $\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{\rho T}$ se deduce para un proceso isentrópico que

$$0 = c_p d \ln T - R d \ln p \quad (1.59)$$

Si el elemento de fluido es llevado isentropicamente desde T y p a la presión de referencia p_0 la temperatura que tendrá será

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.60)$$

esta temperatura θ es llamada *temperatura potencial*. De la definición de temperatura potencial se deduce que $ds = 0 \Leftrightarrow d\theta = 0$. Es decir que si el elemento de fluido tiene movimientos isentrópicos, la temperatura potencial de éste permanecerá constante. Incluso la ecuación de conservación de la entropía (1.56) puede ser reemplazada por una ecuación de conservación de la temperatura potencial

$$D_t\theta = 0 \quad (1.61)$$

En el caso de la atmósfera la presión de referencia p_0 suele ser tomada como la presión en la superficie de la tierra $p_0 = 10^3 \text{hPa}$. Para el caso del océano suele ser mas útil utilizar el concepto de densidad potencial, que se define en forma equivalente, es decir es la densidad que el elemento de fluido tendría si es llevado con movimientos isentrópicos y sin cambios en la composición a la presión de referencia.

Ejercicio 1.11: Encontrar la relación que existe entre la densidad potencial y la temperatura potencial.

1.4.1 Ecuaciones que gobiernan un fluido

Finalmente hemos cerrado el sistema de ecuaciones. Para un fluido ideal, éstas son: conservación del momento

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{F} \quad (1.62)$$

conservación de la masa

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.63)$$

conservación de la energía (i.e. temperatura potencial)

$$D_t\theta = 0 \quad (1.64)$$

y la relación de estado para la temperatura potencial $\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}$ y la presión $p = \rho R T$.

La gran complejidad de estas ecuaciones, aparte del término $\rho \mathbf{u}$, está escondida en el operador D_t ya que este posee términos no-lineales, e.g. $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta$.

Para el caso general de un fluido en el cual se consideran los efectos de la viscosidad y las transferencias de calor las ecuaciones que gobiernan a este son

$$\rho D_t \mathbf{u} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \partial_{x_j} \left\{ \eta \left[(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_{x_i} u_i \right] \right\} \quad (1.65)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.66)$$

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) = \sigma_{ij} \partial_{x_j} u_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.67)$$

Ahora deberíamos discutir cuales son las condiciones de contorno que le tenemos que imponer al fluido, tanto si está limitado por otro fluido como por una superficie sólida.

1.5 Condiciones en una interfase

En el caso que sea un contorno entre un fluido y un sólido, la condición de contorno es que el fluido no puede penetrar el sólido es decir

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (1.68)$$

en el caso que el sólido esté quieto la velocidad normal a la superficie del sólido debe ser nula. Si el sólido se está moviendo, la velocidad normal del fluido en la superficie debe ser igual a la del sólido.

En el caso que tengamos dos fluidos no-miscibles, en la interfase que divide a los dos fluidos debemos pedir que sea una superficie material para ambos medios, i.e. la componente normal de la velocidad debe ser continua. Si la superficie está definida por un función escalar $\eta = \eta(t, \mathbf{x})$ se debe cumplir que

$$D_t \eta = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.69)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie.

Las componentes tangenciales de la velocidad dependen del tipo de fluido con el que se está trabajando, si asumimos fluidos ideales (no-viscosos) no existe ninguna restricción sobre la velocidad paralela a la interfase. En el caso general de fluidos viscosos ésta debe ser continua, de lo contrario existirían forzados muy altos que tenderían a hacer continuas las velocidades, i.e.

$$u_{1\parallel} = u_{2\parallel}. \quad (1.70)$$

En cuanto a las variables termodinámicas, la temperatura debe ser continua si existen un estado de equilibrio termodinámico (Si no hay conducción se espera un estado de equilibrio?). También la presión debe ser continua en la superficie de separación entre medios.

?

Aparece una diferencia importante entre fluidos viscosos y no-viscosos en los contornos. ¿Qué es lo que sucede por ejemplo en la superficie de la tierra (la cual habíamos mencionado se podía asumir en una primera aproximación como un fluido ideal)? En realidad la capa de donde se pasa de tener altas velocidades paralelas es muy poco profunda de hecho se producen altas derivadas que dan lugar a una capa límite turbulenta. Es necesario entonces modelar a través de parametrizaciones las transferencias de momento entre la superficie y el aire.

En el caso de fluidos no viscosos pueden existir discontinuidades en las velocidades tangenciales por lo tanto es conveniente plantear la continuidad de los desplazamientos normales a la superficie (en lugar de las velocidades) ya que notar que las velocidades normales pueden ser discontinuas.

1.6 Flujo de energía: conservación de la energía total

Queremos encontrar una ecuación que describa la evolución de la energía total de un elemento material de fluido, para esto haremos uso de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Multiplicando la ecuación de momento por $\mathbf{u}$,

$$\rho D_t |\mathbf{u}|^2 / 2 = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + u_i \partial_{x_j} \sigma_{ij} \quad (1.71)$$

El término de la mano izquierda es claramente la energía cinética del sistema por unidad de volumen, mientras en la derecha tenemos un término debido a las fuerzas volumétricas que podría ser expresado como un potencial en el caso que las fuerzas sean conservativas, finalmente el término del tensor de stress tiene dos contribuciones las debida a la viscosidad y a la presión.

Sumando (1.71) y (1.51) obtenemos

$$\rho D_t(|\mathbf{u}|^2/2 + \varepsilon) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + \partial_{x_j}(u_i \sigma_{ij}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.72)$$

Si $\mathbf{F}$ es una fuerza conservativa que solo depende de la posición (e.g. fuerza de la gravedad), luego vale que $\mathbf{F} = -\nabla \Phi$ y $\partial_t \Phi = 0$, usando estas expresiones tenemos,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi = -D_t \Phi \quad (1.73)$$

Reemplazando (1.73) en (1.72) resulta

$$\rho D_t(|\mathbf{u}|^2/2 + \varepsilon + \Phi) = \partial_{x_j}(u_i \sigma_{ij}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - \mathbf{F}_{rad}) \quad (1.74)$$

El término de la derecha es la energía total compuesta por la energía cinética, la interna, y la potencial mientras en el RHS se encuentran las fuentes y sumideros de la energía.

Si el fluido es ideal se cumple que

$$\rho D_t(|\mathbf{u}|^2/2 + \varepsilon + \Phi) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) \quad (1.75)$$

La única fuente de energía es la razón de trabajo realizado por la presión.

Definiendo a la energía total por unidad de volumen $E_T = \rho(|\mathbf{u}|^2/2 + \Phi + \varepsilon)$ se tiene que

$$\partial_t E_T + \nabla \cdot [\mathbf{u}(E_T + p)] = 0 \quad (1.76)$$

1.7 Invariante para un fluido ideal, estático: Teorema de Bernoulli

Buscamos una integral de movimiento, es decir una cantidad que sea conservada, en forma equivalente a la energía mecánica en un problema de mecánica clásica de fuerzas conservativas. Para obtener una integral de movimiento necesitamos expresar al término de la presión en (1.75) como una derivada material (multiplicada por la densidad), de esta forma tendríamos una cantidad que se conserva.

Utilizando la conservación de la masa podemos derivar,

$$\nabla \cdot (p\mathbf{u}) = \rho[D_t(p/\rho) - \rho^{-1}\partial_t p] \quad (1.77)$$

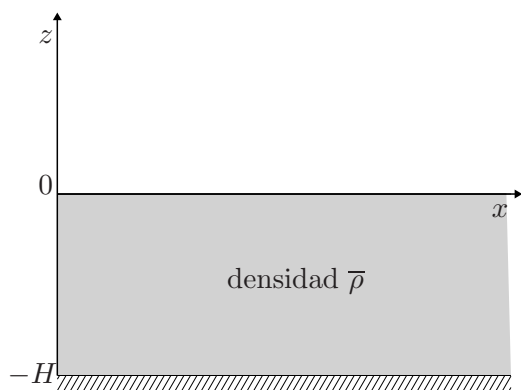
Si asumimos que p es estático tal que $\partial_t p = 0$ luego

$$\boxed{D_t(1/2|\mathbf{u}|^2 + \varepsilon + \Phi + p/\rho) = 0} \quad (1.78)$$

esta cantidad es conservada a lo largo de la trayectoria de un elemento material de fluido. Como en el caso de un flujo estático las trayectorias y las líneas de corriente son equivalentes entonces la cantidad es constante en las líneas de corriente.

La constante no necesariamente es la misma para distintas líneas de corriente. En el caso de flujo potencial es la misma para todas las líneas.

1.8 Fluidos en reposo: hidrostática



Supongamos un estanque extenso de profundidad H que se encuentra lleno de un fluido de densidad constante ρ y que se encuentra en reposo como se muestra en Figura 1.4^a. La superficie libre del fluido está sometida a una presión “atmosférica” o de entorno constante, $p = p_a$.

^aNo necesitamos asumir que el fluido es no-viscoso ya que en estado de reposo la única fuerza superficial es la presión, las fuerzas del tensor de stress tangenciales son nulas.

Figura 1.4: Problema de una capa de fluido con superficie libre. La superficie libre tiene una densidad de $p(\eta) = 0$.

De las ecuaciones de Euler se obtiene que en reposo existe un balance de fuerzas, entre el gradiente de presión y la fuerza de la gravedad:

$$0 = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (1.79)$$

Dado que $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{k}}$,

$$\partial_z p = -\rho g \quad (1.80)$$

Integrando esta ecuación entre $z = 0$ y z se obtiene la presión a una profundidad z

$$p = -\rho g z + p_a \quad (1.81)$$

Es decir que la presión aumenta en forma lineal con la profundidad. Notar que la presión es siempre positiva y puede ser interpretada como el peso de la columna de fluido localizada por encima del elemento de fluido en consideración⁷.

1.9 Ondas de sonido

Veamos que sucede cuando realizamos pequeñas perturbaciones en un fluido ideal cuya única fuerza sobre los elementos de fluido son los gradientes de presión, es decir sin considerar la acción de la gravedad. El conjunto de ecuaciones que se deben satisfacer es

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla p \quad (1.82)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.83)$$

⁷Esta analogía con el peso de la columna solo es válida en el caso hidrostático y no debe extenderse a situaciones con movimientos de fluidos excepto cuando la ecuación hidrostática sea válida, e.g. ecuaciones de ondas planas.

$$D_t \theta = 0 \quad (1.84)$$

La ultima ecuación (1.84) es rescrita usando que

$$\theta = \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \quad (1.85)$$

Aplicando el operador derivada material D_t en (1.85) resulta

$$D_t \ln \theta = D_t \ln p - \gamma D_t \ln \rho = 0 \quad (1.86)$$

donde se uso que $c_p = c_v + R$ y $\gamma = c_p/c_v = 1/\kappa$.

Método perturbativo

Consideremos un parámetro de pequeñez $\epsilon \ll 1$ entonces las variables dependientes pueden ser representadas por

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (1.87)$$

donde ψ es p , $\mathbf{u}$, ρ .

La solución propuesta debe ser reemplazada en el sistema de ecuaciones y luego vamos a obtener un sistema de ecuaciones en el orden 0, un sistema de ecuaciones en orden ϵ y así sucesivamente. Generalmente, se asume que el orden 0 es una solución simple, e.g. ψ_0 es una constante.

Asumimos que el estado que se quiere determinar son pequeñas perturbaciones a un estado básico que es constante ($\mathbf{u}_0$, ρ_0 , p_0 son independientes de la posición y el tiempo),

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1(x, y, z, t) \quad (1.88)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho_1(x, y, z, t) \quad (1.89)$$

$$p(x, y, z, t) = p_0 + p_1(x, y, z, t) \quad (1.90)$$

Linealizando y eliminando $\mathbf{u}_1$ de (1.82) y (1.83) resulta

$$\rho_0 D_{0tt} \rho_1 - \nabla^2 p_1 = 0 \quad (1.91)$$

donde $D_{0t}^0 = \partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$.

Linealizando la ecuación de conservación de la entropía (1.86)

$$D_{0t} p_1 - \gamma p_0 / \rho_0 D_{0t} \rho_1 = 0 \quad (1.92)$$

Eliminando ρ_1 entre las dos ecuaciones resultantes obtenemos una ecuación para las perturbaciones de presión

$$D_{0tt}^2 p_1 - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla^2 p_1 = 0 \quad (1.93)$$

Esta es la ecuación de onda. Si proponemos una solución ondulatoria

$$p_1 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - |\mathbf{k}|ct)] \quad (1.94)$$

Reemplazando en la ecuación resulta que la velocidad de fase es

$$c = \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} + (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2} \quad (1.95)$$

La velocidad del sonido, relativa al flujo, es $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$. En la atmósfera asumiendo un gas diatómico $\gamma = 7/5$, $T_0 = 300K$ nos da una velocidad de sonido de referencia de $350m/s$.

Las magnitudes involucradas con el sonido en la atmósfera son muy pequeñas. Una conversación alta produce unos 70 decibeles y esto corresponde a una variación de la presión de $0.06Pa$ mientras las variaciones de presión relacionada al tiempo en la atmósfera son del orden de los 10^3Pa . Por lo que en general la producción de sonido se considera despreciable cuando estudiamos los movimientos de la atmósfera y el océano.

1.10 Estabilidad

Hemos visto en la sección anterior que cuando un fluido está en reposo existe un equilibrio de fuerzas entre el gradiente vertical de presión y la fuerza de gravedad, sin embargo esto no nos asegura que el equilibrio sea estable, no sabemos lo que sucederá si desplazamos verticalmente hacia arriba (hacia abajo) a nuestro elemento material de fluido, dependiendo de como sea el peso del elemento comparado con la fuerza de flotación del entorno puede que este continúe ascendiendo, flujo inestable (estable) o descienda, flujo estable (inestable).

Es decir que la estabilidad consiste en la comparación a través del principio de Arquímedes del peso del elemento de fluido con el peso del fluido que ha sido desplazado, al cual denominaremos entorno. Supongamos que desplazamos un elemento de fluido de la posición z a la posición $z + \delta z$, la aceleración del elemento de fluido viene dada por

$$\rho_p(z)V \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (-\rho_p(z + \delta z)Vg + \rho_e(z + \delta z)Vg) \quad (1.96)$$

donde ρ_p es la densidad de la parcela, ρ_e es la densidad del entorno y V es el volumen del elemento de fluido.

Entonces si $(-\rho_p(z + \delta z) + \rho_e(z + \delta z)) > 0$ el elemento continuará su ascenso, esto significa que el equilibrio es inestable. Si por el contrario la densidad del elemento de fluido es mayor a la del entorno, éste tenderá a volver a su posición de equilibrio y en este caso el equilibrio es estable.

Desarrollando en Taylor a las densidades,

$$\rho_e(z + \delta z) = \rho_e(z) + \partial_z \rho_e(z) \delta z \quad (1.97)$$

$$\rho_p(z + \delta z) = \rho_p(z) + \partial_z \rho_p(z) \delta z \quad (1.98)$$

Reescribiendo (1.96) y manteniendo solo hasta el primer orden en δz obtenemos,

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{\partial_z \rho_e - \partial_z \rho_p}{\rho_e} g \delta z \quad (1.99)$$

Notar que las cantidades se encuentran todas evaluadas a la altura z .

Si asumimos que el elemento de fluido es ascendido lo suficientemente rápido como para que no haya conducción de calor con el entorno entonces el proceso ha sido adiabático y podemos determinar $\partial_z \rho_p$, para esto expresamos a $\partial_z \rho_p$ en función de los cambios de temperatura con la altura, equivalentemente la variación de la densidad del entorno con la altura $\partial_z \rho_e$ también la expresamos en función de la variación de la temperatura.

Si el elemento de fluido realiza un proceso isentrópico se cumple que

$$0 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT \quad (1.100)$$

Utilizando conocidas relaciones termodinámicas se obtiene

$$0 = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.101)$$

Derivando con respecto a z , (1.101), y teniendo en cuenta que el elemento de fluido estaba en equilibrio mecánico $p_p = p_e$ y además como el entorno estaba en equilibrio hidrostático

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{c_v}{c_p} \frac{g}{RT_e} \quad (1.102)$$

De esta manera hemos obtenido como cambia la densidad del elemento de fluido con la altura en función de la temperatura. Por otro lado, para expresar la densidad del entorno en función de la temperatura usamos que

$$d\rho_e = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp \quad (1.103)$$

Usando la relación de gas ideal se deriva que

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} \quad (1.104)$$

Luego, usamos equilibrio hidrostático,

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{g}{RT_e} \quad (1.105)$$

Hemos obtenido las relaciones entre las densidades y las temperaturas (1.102) y (1.105) reemplazando en (1.99) obtenemos

$$\frac{d^2 \delta z}{dz^2} = -\frac{g}{T_e} \left(\frac{dT_e}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) \delta z \quad (1.106)$$

Tenemos una relación que nos dice directamente del perfil vertical de temperatura si el gas ideal estará en equilibrio estable o no,

$$\frac{dT_e}{dz} < -\frac{g}{c_p} \quad \rightarrow \quad \text{Inestable}$$

$$\frac{dT_e}{dz} > -\frac{g}{c_p} \quad \rightarrow \quad \text{Estable}$$

Para el aire ($c_p = 1\text{J(gK)}^{-1}$) se tiene que $\frac{g}{c_p} = 9.8\text{K/km}$ es decir que si la temperatura desciende con la altura de manera mas abrupta que 9.8K/km la atmósfera estará inestable convectivamente. De lo contrario si el perfil de temperatura desciende mas moderadamente

será estable y en este caso de (1.106) se observa que se producirán oscilaciones verticales cuya frecuencia cuadrada viene dada por

$$N^2 = \frac{g}{T_e} \left(\frac{dT_e}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) \quad (1.107)$$

Ésta, N^2 , es denominada frecuencia de flotación o frecuencia de Brunt-Väisälä. Las oscilaciones que se generan son denominadas ondas de gravedad ya que es generada a través de esta fuerza, es la aceleración de la gravedad la que tiende a volver a la parcela hacia su posición de equilibrio cuando ésta es desplazada verticalmente.

Ejercicio 1.12: Deduzca la ecuación de estabilidad utilizando la ecuación de momento vertical y la conservación de la temperatura potencial. Asuma que hay pequeñas perturbaciones (método perturbativo), asuma además que las perturbaciones de la presión son despreciables.

Capítulo 2

Ajuste bajo gravedad

La forma general de resolución de un problema de dinámica de fluidos que emplearemos es realizando pequeñas perturbaciones a un fluido que se encontraba en equilibrio y estudiar como el fluido evoluciona hacia un nuevo estado de equilibrio.

Que hay detrás de este esquema de pensamiento:

- los fluidos permanecen en estado de equilibrio excepto que agentes externos lo perturben.
- la respuesta del fluido al agente externo (perturbación, forzado etc.) es evolucionar hacia un nuevo estado de equilibrio.

2.1 Ondas de gravedad superficiales

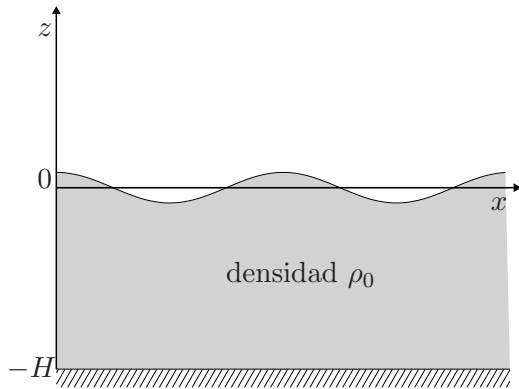


Figura 2.1: Problema de una capa de fluido con superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(\eta) = p_a$.

Consideremos el sistema representado en Fig. 2.1, *viz* un estanque extenso de profundidad H que se encuentra lleno de un fluido no viscoso de densidad constante ρ_0 . Inicialmente el fluido está en reposo y repentinamente es alterado por un factor externo, e.g. tiramos una piedra. El sistema de coordenadas se ubica tal que el plano $x - y$ para $z = 0$ coincide con la interface definida en el estado de equilibrio hidrostático, por lo que el fondo del estanque está localizado en $z = -H$.

Las preguntas son: ¿como responderá el fluido, que tipos de movimientos se establecerán?, ¿se logrará obtener un nuevo tipo de equilibrio?, ¿es el nuevo equilibrio estable?. Es decir queremos determinar cual será el proceso de ajuste que llevará al fluido del estado alterado en que se encuentra a un estado de equilibrio. Dado que la fuerza restauradora que será la encargada de establecer este equilibrio es la fuerza de gravedad el proceso se denomina ajuste bajo gravedad.

La observación de este fenómeno nos indica por un lado que el fluido responde a la perturbación a través de ondas que eliminan la energía cinética o potencial introducida a través de su propagación hacia el infinito, para obtener luego de este proceso un nuevo estado de equilibrio hidrostático. En el caso en que la interface tenga una distribución inicial, el nuevo estado del fluido será uno en el cual la energía potencial extra se habrá distribuido en toda la superficie del estanque. Tratemos de formular el problema matemáticamente y de demostrar su evolución.

Dado que se asume que la densidad del fluido es constante, ρ_0 , las ecuaciones que gobiernan la evolución del fluido son, conservación del momento y ecuación de continuidad,

$$\rho_0 D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

De esta manera el sistema de ecuaciones esta cerrado, tenemos cuatro ecuaciones con cuatro variables dependientes. Al considerar la densidad constante hemos eliminado la termodinámica y tenemos un problema puramente dinámico.

Las condiciones de contorno serán dadas por la continuidad de la velocidad vertical del fluido tanto en el contorno inferior como en el superior y la continuidad de la presión en el contorno superior. Entonces, en el contorno inferior

$$w(z = -H) = 0 \quad (2.3)$$

en la superficie libre

$$w(z = \eta) = D_t \eta \quad (2.4)$$

esta es la condición para que las partículas que están en la interface permanezcan allí (dado que de lo contrario existiría vacío y por definición la interface es donde se ubica la superficie libre del fluido).

La presión en la condición de contorno inferior puede tomar cualquier valor ya que se encuentra ante una pared rígida, mientras en el contorno superior tenemos que la presión debe ser igual a la presión “ambiente”,

$$p(\eta) = p_a \quad (2.5)$$

Tanto el sistema de ecuaciones diferenciales como la condición de contorno son no-lineales y no existe una solución analítica conocida. Mas aun, no se sabe si tal solución existe y si es suave.

Pero dado que estabamos en estado de reposo y lo que hicimos fue producir una pequeña perturbación al estado de reposo esperamos entonces que la solución sea una pequeña perturbación a la solución que existía, léase al equilibrio hidrostático.

Método perturbativo

Consideremos un parámetro de pequeñez $\epsilon \ll 1$ entonces las variables dependientes pueden ser representadas por

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (2.6)$$

donde ψ es p , $\mathbf{u}$, ρ . Las perturbaciones de la interface del fluido son consideradas pequeñas, luego $\eta = \epsilon \eta_1$.

Reemplazando soluciones de la forma (2.6) en (2.1), (2.2) obtenemos una serie de ecuaciones para cada orden en ϵ . Las ecuaciones para el orden 0, en un problema, donde *el estado básico* es estático ($\psi_0(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x})$), son

$$\rho_0(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.8)$$

Denominamos entonces estado básico a la solución de las ecuaciones de orden cero.

Las ecuaciones que deben satisfacer las variables de orden 1 son

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0) = -\nabla p_1 \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (2.10)$$

Notar que las ecuaciones perturbadas de primer orden son lineales, es por esto que la obtención de las ecuaciones perturbadas se suele llamar linealización, y aquí radica la gran simplificación que nos da el método perturbativo hemos evitado las no linealidades, por supuesto el método es válido en tanto y en cuanto $u_0 \gg \epsilon u_1$ o mas específicamente $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \gg \epsilon \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1$.

?

Dado que las condiciones de contorno están evaluadas en la interface $z = \eta$ es necesario realizar un desarrollo de Taylor alrededor de la posición de equilibrio hidrostático de la interface, $z = 0$. Por lo que la velocidad vertical se expresa como

$$w(z = \eta) = w(z = 0) + \eta \partial_z w|_{z=0} + \sigma(\eta^2) = \epsilon w_1(z = 0) + \epsilon^2 \eta_1 \partial_z w_1 + \sigma(\eta^2) \quad (2.11)$$

Luego si exigimos continuidad de la velocidad vertical perturbada, orden 1 del desarrollo,

$$w_1(z = 0) = \partial_t \eta_1 \quad (2.12)$$

Dado que asumimos que la perturbación es pequeña, explícitamente lo que asumimos es que los desplazamientos verticales de la interface son mucho menores a la profundidad del fluido, $\eta = \epsilon \eta_1 \ll H$, entonces escribimos a los campos en potencias de un parámetro de pequeñez ϵ . Este método perturbativo nos permite desarrollar la ecuación en distintos órdenes por lo que se obtiene así un sistema de ecuaciones para cada orden. Las ecuaciones de orden 0, en este método, se denominan *estado básico*, este es el estado que existía antes que el sistema fuera perturbado. Como el problema nos dice que teníamos un estado de reposo, el estado básico del sistema puede ser descripto por

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}_1 + \sigma(\epsilon^2), \quad p = p_0(z) + \epsilon p_1 + \sigma(\epsilon^2), \quad \rho = \rho_0 \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{u}_0 = 0$, y por lo tanto existía equilibrio hidrostático

$$-\partial_z p_0 + \rho_0 \mathbf{g} = 0 \quad (2.14)$$

Las ecuaciones perturbadas correspondientes al primer orden del desarrollo en ϵ representarán el disturbio al estado básico. Las ecuaciones resultantes a primer orden son (notando que e.g. $D_t \mathbf{u} = \partial_t \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + \dots = \epsilon \partial_t \mathbf{u}_1 + \sigma(\epsilon^2)$)

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (2.16)$$

Aplicando el operador divergencia a (2.15) y usando (2.16) se obtiene una ecuación para la presión perturbada:

$$\nabla^2 p_1 = 0 \quad (2.17)$$

es decir que las perturbaciones de la presión satisfacen la ecuación de Laplace.

Lamentablemente (2.17) no nos permite obtener la evolución temporal de p . La información sobre la evolución temporal deberá ser obtenida a través de las condiciones de contorno.

Proponemos ahora una solución para p_1 , para esto nos vamos a restringir a un fluido 2D (alcanza con asumir simetría a lo largo del eje y , es decir los campos iniciales son independientes de la variable y). Como en la coordenada horizontal x no existen condiciones de contorno, asumimos un estanque extenso, pero si tenemos condiciones de contorno en la vertical, proponemos soluciones del tipo:

$$p_1(x, z, t) = \hat{p}_1(z, t) \exp(-ikx) \quad (2.18)$$

Reemplazando (2.18) la ecuación resultante es

$$\partial_{zz}^2 p_1 - k^2 p_1 = 0 \quad (2.19)$$

Luego las soluciones que proponemos sujeta a las condiciones de contorno son

$$\hat{p}_1(z, t) = \hat{p}_A(t) \cosh(k(z + H)) + \hat{p}_B(t) \sinh(k(z + H)) \quad (2.20)$$

Como condición de contorno tenemos que la presión del fluido en la interface libre debe ser igual a la presión del entorno:

$$p(z = \eta) = p_a. \quad (2.21)$$

Desarrollando en Taylor el RHS $p(z = \eta) = p(z = 0) + \eta \partial_z p(z = 0) + \sigma(\eta^2)$, notando que $p(z = 0) = p_0(z = 0) + \epsilon p_1(z = 0)$, donde $p_0(z = 0) = p_a$ y utilizando equilibrio hidrostático (2.14) obtenemos

$$p_1 = \rho_0 g \eta_1. \quad (2.22)$$

La otra condición en la interface es $w_1(z = 0) = \partial_t \eta_1$ donde hemos mantenido solo el primer orden en $w_1(z = \eta_1)$ para ser consistentes con el segundo miembro. La condición de contorno inferior es $w_1(z = -H) = 0$.

Dado que la conservación de momento nos relaciona w con p podemos obtener que como $w_1(z = -H) = 0$ se debe cumplir que $\partial_z p_1(z = -H) = 0$, entonces $\hat{p}_B(t) = 0$.

En la superficie de arriba se tiene que

$$\hat{p}_A(t) = \frac{\rho g}{\cosh(kH)} \eta_1. \quad (2.23)$$

Reemplazando en la condición de frontera $w_1 = \partial_t \eta_1$ se tiene la ecuación diferencial para la evolución de la interface

$$\partial_{tt}^2 \hat{\eta}_1 = -gk \tanh(kH) \hat{\eta}_1, \quad (2.24)$$

se propone entonces una solución oscilatoria

$$\hat{\eta}_1(t) = \tilde{\eta}_1 \exp(i\omega t) \quad (2.25)$$

Para que esta función sea solución (2.24) debe existir una relación entre el número de onda y la frecuencia, que comúnmente se denomina relación de dispersión

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \quad (2.26)$$

esta relación fue obtenida por Laplace, y nos da información sobre la propagación de las ondas superficiales. Notar que la frecuencia no depende linealmente del número de onda, es decir que la velocidad de fase $c = \omega/k$ depende del número de onda, en este caso las ondas son dispersivas.

La relación de dispersión tiene dos comportamientos límites en función del parámetro kH

$$kH \rightarrow \infty \quad \tanh(kH) \approx 1 \Rightarrow \omega^2 = kg \quad (2.27)$$

Éste es el límite de aguas profundas, u onda corta, notar que en este límite tenemos ondas dispersivas.

En el límite de aguas poco profundas, pandas, $kH \rightarrow 0$ la relación de dispersión aproximada es

$$\omega^2 = gHk^2 \quad (2.28)$$

En el límite $kH \rightarrow 0$ las ondas no son dispersivas, es decir para cualquier número de onda la velocidad de fase es independiente de k , $c = \sqrt{gH}$. En el caso del océano si tenemos una profundidad de 1 km la velocidad de fase es 100 m/s!, y además son ondas no dispersivas por lo cual se propagarán grandes distancias sin desparramar la energía inicial.

Ejercicio 2.1: Dadas las soluciones realizar un desarrollo de Taylor en función de kH y ver como es el comportamiento de u , w y η para el límite $kH \rightarrow 0$. Luego analice las ecuaciones en este límite y deduzca que términos serán despreciables.

Ejercicio 2.2: Supongamos que repentinamente se levanta un viento produciendo un forzado en la superficie libre de un estanque extenso que inicialmente estaba en reposo. El forzado producido por el viento es de la forma $\eta = \eta(x, t)$. Determine cual será la evolución de la presión y la velocidad. Utilize teoría de Fourier.

2.2 Ecuaciones de ondas pandas

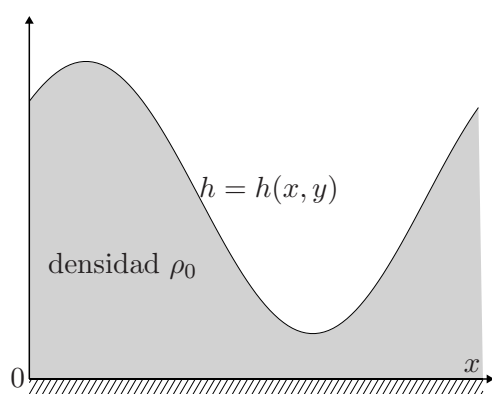


Figura 2.2: Problema de una capa de fluido con superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(h) = p_a$. El origen se toma en el fondo del estanque.

Ahora trataremos de derivar el sistema de ecuaciones para el caso en que al plantear el problema podemos asumir que tenemos ondas largas o la profundidad del fluido es pequeña. Para este caso se obtuvo en la sección anterior que teníamos ondas no dispersivas. El sistema de ecuaciones que se derivará es el denominado ecuaciones de ondas pandas, el cual está basado en la aproximación hidrostática, pero en ningún momento asumiremos que el disturbio es pequeño, por lo que esperamos obtener las ecuaciones no-lineales.

En el límite de kH mas pequeño se puede observar que p_1 será una constante independiente de z es decir que el orden 0 del desarrollo en series de kH se obtiene que:

$$\partial_z p_1 = 0 \quad (2.29)$$

Mientras es recién el orden kH en el que la velocidad vertical se iguala con la derivada vertical de la presión (que corresponde al orden $(kH)^2$ en la presión).

Es decir que *la aproximación de ondas pandas corresponde a tomar equilibrio hidrostático.*

Dado que el disturbio no es necesariamente pequeño medimos la profundidad del fluido, $h(x, y, t)$ (la altura de la interface) desde el fondo del estanque como se muestra en Fig. 2.2. Nótese que eliminamos por completo el uso de la profundidad H un concepto que era necesario para el desarrollo en órdenes.

En estado hidrostático cuando tenemos un disturbio de la interface, no necesariamente pequeño, la presión viene dada por

$$p = p_a + \rho_0 g(h - z) \quad (2.30)$$

Luego el gradiente horizontal de presión ($p = f(z) + \rho_0 g h(x, y, t)$) viene dado por

$$\nabla_H p = \rho g \nabla_H h. \quad (2.31)$$

El suscripto H representa a gradientes horizontales, en x y z .

La relación entre p y h de (2.31) permite eliminar el término del gradiente de presión en la ecuación de momento horizontal, resultando

$$D_t \mathbf{u}_H = -g \nabla_H h \quad (2.32)$$

La ecuación de conservación de la masa dado que el fluido es incomprensible es $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, integrando en altura desde $z = 0$ hasta $z = h$ es

$$w(h) - w(0) = -\nabla \cdot \mathbf{u} h \quad (2.33)$$

donde hemos usado que la velocidad horizontal es independiente de la altura, aproximación equivalente a la realizada para la presión; esto se deduce de (2.32) ya que el lado derecho es independiente de z . Reemplazando por las condiciones de contorno,

$$D_t h + h \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.34)$$

El sistema de ecuaciones resultantes será

$$\begin{cases} D_t \mathbf{u} = -g \nabla h \\ \partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Mucho de los fenómenos físicos observados en sistemas mas complejos tienen su contrapartida en el de ondas pandas, por lo cual para estudiar procesos complicados el primer sistema a estudiar son las shallow-water equations. Otra utilidad de este sistema de ecuaciones se debe a que en general para modelar la atmósfera se divide la atmósfera en capas verticales, cada una de estas capas puede ser modelada por la shallow-water equations, ya que se las suele considerar de

densidad constante y de poca profundidad (entre 1 km hasta 100m en los modelos de alta resolución).

Ejercicio 2.3: Linealizar el sistema de ecuaciones de ondas pandas alrededor de un estado en reposo con $h = h_0$, encontrar la velocidad de fase de las ondas. Notar que hemos logrado pasar las dependencias temporales del sistema de las ecuaciones de contorno a las ecuaciones mismas.

2.3 Ondas en dos fluidos superpuestos

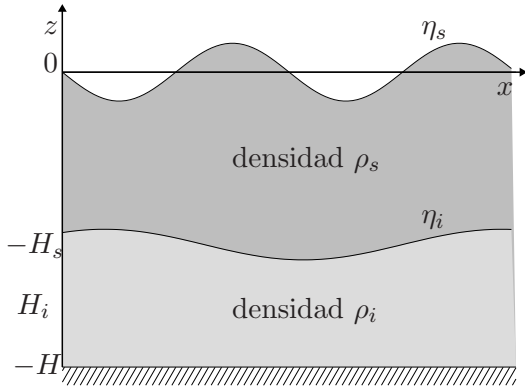


Figura 2.3: Problema de dos fluidos superpuestos con densidades ρ_s y ρ_i y con una superficie libre. La superficie libre tiene una presión de $p(\eta) = p_a$.

Supongamos ahora que tenemos dos fluidos superpuestos de densidades ρ_s y ρ_i como se muestra en la Fig. 2.3. Notar que denotamos por subíndices s e i a las variables que corresponden a la capa superior e inferior respectivamente. Queremos resolver como responde este sistema a un forzado externo para esto usaremos las ecuaciones de aguas pandas.

En la capa superior la presión en la aproximación hidrostática viene dada por

$$p = p_a + \rho_s g(\eta_s - z) \quad (2.36)$$

donde p_a es la presión ambiente que se asume una constante.

En la capa de abajo la presión es

$$p = p_a + \rho_s g(H_s + \eta_s - \eta_i) + \rho_i g(\eta_i - z - H_s) \quad (2.37)$$

Derivando con respecto a x y reemplazando en las ecuaciones de momento horizontal se obtiene

$$\partial_t u_s = -g \partial_x \eta_s \quad (2.38)$$

$$\partial_t u_i = -g' \partial_x \eta_i - g \partial_x \eta_s \quad (2.39)$$

donde hemos asumido que $\rho_i \approx \rho_s$ y $g' = \frac{\rho_i - \rho_s}{\rho_i} g$ se denomina gravedad reducida, notar que los movimientos en la interface sienten una gravedad g' .

La ecuación de conservación de la masa en la capa de arriba resulta de integrar en altura entre η_s y $-H_s + \eta_i$

$$\partial_t (\eta_s - \eta_i) + H_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 \quad (2.40)$$

en la capa baja integrando entre $-H_s + \eta_i$ y $-H$ se obtiene

$$\partial_t \eta_i + H_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (2.41)$$

Eliminando u_s y u_i nos da

$$\partial_{tt}^2 \eta_s = (c_s^2 + c_i^2) \partial_{xx}^2 \eta_s + c_i^2 \partial_{xx}^2 \eta_i \quad (2.42)$$

$$\partial_{tt}^2 \eta_i = +c_i^2 \partial_{xx}^2 \eta_s + c_i'^2 \partial_{xx}^2 \eta_i \quad (2.43)$$

donde $c_s^2 = gH_s$, $c_i^2 = gH_i$ y $c_i'^2 = g'H_i$.

Proponemos soluciones de la $\eta_s = \hat{\eta}_s(t) \exp i(\omega t - kx)$ y ya que tenemos un sistema de ecuaciones lineales acopladas pensamos en un problemas de autovalores y autovectores, en cuyo caso el determinante debe anularse

$$\det \begin{vmatrix} c^2 - (c_s^2 + c_i^2) & -c_i'^2 \\ -c_i^2 & c^2 - c_i'^2 \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

Luego la ecuación característica resultante es

$$[c^2 - (c_s^2 + c_i^2)](c^2 - c_i'^2) - c_i'^2 c_i^2 = 0 \quad (2.45)$$

Dado que $c_s^2, c_i^2 \gg c_i'^2$ se tiene

$$c^4 - (c_s^2 + c_i^2)c^2 + c_s^2 c_i'^2 = 0 \quad (2.46)$$

Las raíces de esta ecuación son

$$c^2 \approx \begin{cases} c_s^2 + c_i^2 = gH \\ -\frac{c_s^2 c_i'^2}{4(c_s^2 + c_i^2)} = -\frac{g'H_s H_i}{H_s + H_i} \end{cases} \quad (2.47)$$

Existen dos modos cualitativamente distintos, un modo lento y un modo rápido, además cada uno de estos modos permite velocidades de propagación en ambos sentidos.

Calculemos ahora como son los desplazamientos para cada uno de estos modos. En el caso del modo rápido, de (2.43) se tiene

$$\eta_i = \frac{c_i^2}{c_s^2 + c_i^2} \eta_s \quad (2.48)$$

esto es lo que se podría esperar para shallow water con condición de contorno interior $w = 0$ y lineal hasta la superficie externa. El modo rápido es simplemente lo que esperaríamos de una sola capa de fluido de densidad uniforme, este modo es denominado *barotrópico*.

El modo “nuevo” que esta apareciendo es el modo lento, en este caso los desplazamientos en la interface de (2.42) vienen dados por

$$\eta_i = \frac{c_s^2 + c_i^2}{c_i'^2} \eta_s \quad (2.49)$$

La señal en la interface esta amplificada con respecto a la señal en la superficie la cual es casi imperceptible si la diferencia de densidades es pequeña. Al modo lento se lo suele denominar modo *baroclínico*.

Ejercicio 2.4: Plantear un sistema de ecuaciones que tenga 3 capas de fluidos. ¿Cuántos modos tiene este sistema? ¿Qué tipo de modos nuevos aparecen? ¿son barotrópicos o baroclínicos?

Ejercicio 2.5: Extender el problema anterior a un sistema de n capas. ¿Puede hacer algun comentario sobre la aplicación de este sistema a modelos numéricos de la atmósfera?. Cada nuevo modo lento que aparece representa el movimiento de una sola capa y los desplazamientos en las otras capas son pequeños.

2.4 Ondas de gravedad internas

Supongamos ahora un estado básico en reposo con la densidad que depende continuamente de z , $\rho_0(z)$, es decir el fluido esta continuamente estratificado. Este problema es la extensión del problema de n capas cuando la profundidad de cada capa tiende a cero mientras n tiende a infinito, por lo que esperamos tener infinitos modos.

Utilizamos además la aproximación de Boussinesq donde se considera a la densidad una constante excepto en el término que da lugar a la fuerza de flotación $-\rho_1 g$ en la ecuación de conservación de momento vertical. Como resultado de esta aproximación se tiene que el fluido es incomprensible y que las variaciones de densidad son pequeñas perturbaciones de la densidad del estado básico. La aproximación de Boussinesq solo es válida para movimientos en los cuales la escala vertical es mucho menor a la escala de alturas.

Dado que en la aproximación de Boussinesq podemos tratar al fluido como incomprensible, de esta manera eliminamos las ondas de sonido pero mantenemos a las ondas de gravedad.

El sistema de ecuaciones linealizadas viene dado por

$$\rho_0 \partial_t u_1 = -\partial_x p_1 \quad (2.50)$$

$$\rho_0 \partial_t w_1 = -\partial_z p_1 - \rho_1 g \quad (2.51)$$

$$\partial_x u_1 + \partial_z w_1 = 0 \quad (2.52)$$

$$\partial_t \theta_1 + w_1 \partial_z \theta_0 = 0 \quad (2.53)$$

El sistema de ecuaciones (2.50)-(2.53) no está cerrado para esto necesitamos una relación entre ρ_1 y θ_1 . Teniendo en cuenta la definición de temperatura potencial y despreciando las variaciones de la presión la relación que se obtiene es

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (2.54)$$

Es decir

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = -\frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (2.55)$$

Luego de (2.53) en (2.51) usando que $N_0^2 = g\theta_0^{-1}\partial_z\theta_0$.

$$\partial_{tt}^2 w_1 = -\partial_{zt}^2 \frac{p_1}{\rho_0} - N_0^2 w_1 \quad (2.56)$$

Mientras de (2.52) en (2.50) se obtiene

$$\partial_{tz}^2 w_1 = \partial_{xx}^2 \frac{p_1}{\rho_0} \quad (2.57)$$

La ecuación diferencial resultante para la perturbación de velocidad vertical viene dada por

$$\partial_{tt}^2 (\partial_{zz}^2 + \partial_{xx}^2) w_1 + N_0^2 \partial_{xx}^2 w_1 = 0 \quad (2.58)$$

Proponemos como soluciones ondas planas, dado que los coeficientes de la ecuación son todos constantes, de hecho esto se podría haber realizado en las ecuaciones originales,

$$w_1 = \hat{w}_1 \exp i(\omega t - kx - mz) \quad (2.59)$$

Para que estas ondas planas sean solución de (2.58) se debe cumplir la relación de dispersión

$$\omega^2 = \frac{N_0^2 k^2}{k^2 + m^2} \quad (2.60)$$

La relación de dispersión de las ondas de gravedad internas, (2.60), tienen diferencias sustanciales con respecto a las ondas superficiales, ya que no depende de la magnitud del número de onda pero depende del coseno del ángulo que el vector número de onda $\mathbf{k}$ forma con el eje horizontal, *viz*

$$\omega = N_0 \cos \phi \quad (2.61)$$

Otras de las propiedades que poseen estas ondas es que son ondas transversales, esto puede verse de (2.52) de donde se deduce que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.62)$$

La dirección de oscilación de las parcelas es perpendicular a la dirección de propagación de la fase de las ondas.

Para ver en que dirección se están propagando las ondas, es decir la dirección de propagación de la energía de estas ondas calculemos el vector velocidad de grupo, en la sección (2.6) veremos como la velocidad de grupo es la velocidad con la que se propaga la información de las ondas. La velocidad de grupo es

$$\mathbf{c}_g = \nabla_k \omega = \frac{N_0 m}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (m, -k) \quad (2.63)$$

Es decir que el vector velocidad de grupo es perpendicular a $\mathbf{k}$

$$\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (2.64)$$

Aunque resulte anti-intuitivo la dirección de las oscilaciones de las parcelas son paralelas a la velocidad de grupo, no confundir con la transversalidad del vector número de onda con el vector velocidad.

Dado que la velocidad de grupo vertical es

$$c_{gz} = -\frac{\omega}{k^2 + m^2} m \quad (2.65)$$

Notar que la velocidad de grupo vertical tiene el signo opuesto a la velocidad de fase vertical $c_z = \omega/m$, es decir que mientras la fase de las OGI se propaga hacia abajo la energía se propaga hacia arriba.

Si tenemos una fuente de ondas de gravedad radiando a una frecuencia fija ω en el centro de un fluido estratificado las ondas *no* se propagan en todas las direcciones sino que se propagarán en las direcciones $\pm\phi$ con respecto a la vertical donde $\phi = \cos^{-1} \omega/N_0$.

Es importante notar que los términos no lineales advectivos que han sido despreciados por la linealización de las ecuaciones, *e.g.* $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ es anulado totalmente debido a la transversalidad de las ondas, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Ejercicio 2.6: Comenzando del sistema de ecuaciones para las OGI y proponiendo la aproximación hidrostática también para las variables perturbadas obtenga la relación de dispersión para esta aproximación. Compare con el derivado de la aproximación de Boussinesq. ¿Que se debe asumir en la relación de dispersión para obtener la aproximación hidrostática? haga una comparación a lo que sucede en el caso de la aproximación shallow-water.

2.5 Energía de las ondas de gravedad internas

Para encontrar como evoluciona la energía ondulatoria de OGI's partimos directamente de las ecuaciones, multiplicando la ecuación de momento horizontal, (2.50), por u_1 y la ecuación de momento vertical, (2.51), por w_1 y luego sumando se obtiene

$$\partial_t \left[\frac{\rho_0}{2} (u_1^2 + w_1^2) \right] + \rho_1 w_1 g = -\nabla \cdot (p_1 \mathbf{u}) \quad (2.66)$$

Luego notando que los desplazamientos verticales linealizados son $w_1 = \partial_t \zeta$, usando (2.53) obtenemos

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{N_0^2}{g} \zeta \quad (2.67)$$

reemplazando en (2.66) y sumando el término nulo $p_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1$

$$\partial_t \left[\frac{\rho_0}{2} (\overline{u_1^2 + w_1^2}) + \frac{\rho_0 N_0^2}{2} \overline{\zeta^2} \right] = -\nabla \cdot (\overline{p_1 \mathbf{u}_1}) \quad (2.68)$$

Donde hemos promediado a los campos en la fase, la idea de la promediación es eliminar las dependencias con la fase y obtener solo dependencias con la envolvente. Nótese de todas maneras que esta ecuación es válida también sin la promediación en la fase.

La densidad de energía ondulatoria, que denotaremos por W_r esta dividida en dos partes la energía cinética, $\frac{\rho_0}{2} (\overline{u_1^2 + w_1^2})$ y la energía potencial $\frac{\rho_0 N_0^2}{2} \overline{\zeta^2}$. Los cambios en la energía ondulatoria están relacionados al trabajo hecho por la presión externa, término LHS de (2.68). Este término, $\mathbf{I} = \overline{p_1 \mathbf{u}_1}$ puede interpretarse como un flujo de energía ondulatoria.

El teorema de equipartición (Lighthill, 1978) demuestra que la energía potencial y la energía cinética en ondas de gravedad internas son iguales. Este teorema es válido para cualquier sistema dinámico no-rotante con pequeñas oscilaciones.

Ejercicio 2.7: Demostrar que si tenemos una onda de gravedad monocromática, definida por (2.59), las densidades de energía cinética y potenciales son iguales para este caso. ¿Es necesario realizar la promediación en la fase para obtener este resultado?.

La ecuación de la energía (2.68) puede reescribirse en la forma

$$\partial_t W_r + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0 \quad (2.69)$$

Para que esta pueda ser interpretada como una ecuación de conservación de la energía se debería escribir al flujo de energía $\mathbf{I}$ como el producto de una velocidad por la densidad de energía, de esta forma la densidad de energía satisfecería una ecuación equivalente a la que satisface, la densidad de masa.

Bajo la hipótesis de un paquete ondulatorio, la cual veremos en la próxima unidad, se demuestra que el término de flujo de energía es posible expresarlo en la forma

$$\mathbf{I} = \overline{p_1 \mathbf{u}_1} = W_r \mathbf{c}_g \quad (2.70)$$

Por lo que la densidad de energía es una cantidad que se *conserva* de la misma forma que lo hace la densidad de masa, sin embargo la velocidad de propagación, o transporte, de la energía es la velocidad de grupo.

En la próxima unidad veremos como es la evolución de un disturbio el cual inicialmente puede ser una función arbitraria, demostraremos como si miramos a tiempos largos lo que encontraremos son ondas con número de onda y frecuencias bien definidas, es decir veremos la forma en que opera el proceso de dispersión.

Ejercicio 2.8: Demuestre que para ondas de gravedad, la energía mecánica esta equiparticionada entre la energía cinemática y la potencial.

2.6 Propagación de ondas: velocidad de grupo

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de orden N y queremos resolver un problema de condiciones iniciales a través de la integral de Fourier. Para esto expresamos a la solución general en función de una suma en k ¹:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(k) \exp[i\omega_n t - kx] dk \quad (2.71)$$

donde ω_n son las n raíces de la relación de dispersión.

Para determinar los $u_n(k)$ es necesario imponer las condiciones iniciales.

Si la ecuación diferencial es de segundo orden representando ondas que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, y como datos conocemos:

$$u(x, 0) = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(k) \exp[ikx] dk \quad (2.72)$$

$$\partial_t u(x, 0) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(k) \exp[ikx] dk \quad (2.73)$$

Multiplicando por $\exp(ikx)$ e integrando en x a ambos lados de (2.72) y (2.73) y usando que $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx$ se obtiene

$$\hat{u}_1 = \frac{-i\hat{f}_2 - \omega_2 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad (2.74)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{i\hat{f}_2 - \omega_1 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad (2.75)$$

Asumiendo que $\omega_1 = \omega(k)$ y $\omega_2 = -\omega(k)$ resulta

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 - i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \quad (2.76)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 + i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \quad (2.77)$$

¹Los problemas de condiciones iniciales es conveniente expresarlos como una integral en k , k variable independiente, mientras los de condiciones de contorno es conveniente tener a ω como variable independiente

Hagamos un desarrollo de Taylor alrededor de k_0 para la relación de dispersión

$$\omega_1 = \omega(k_0) + \partial_k \omega(k_0)(k - k_0) + \dots \quad (2.78)$$

para esto asumimos que la relación de dispersión es una función “suave” alrededor de k_0 .

Teniendo en cuenta solo uno de los términos de (2.71), las cuentas son equivalentes para el otro, y si aplicamos a éste el desarrollo en la integral de Fourier, para esto se debe asumir que $u_1(k)$ está concentrado en k_0 ².

$$u(x, t) = \exp[i\omega_0 t - k_0 x] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(k) \exp[-i(k - k_0)(x - \partial_k \omega(k_0)t)] dk \quad (2.79)$$

Como estamos asumiendo que la transformada de Fourier de f_1 está concentrada en k_0 la función puede ser escrita como $f_1(x) = A(x)e^{ik_0 x}$ donde $A(x)$ es una función suave con transformada de Fourier concentrada en $k = 0$, mientras la $f_2 = 0$.

Luego deberíamos notar que la integral corresponde a la integral dada como condición inicial pero la trasladamos en el espacio de Fourier de tal manera que el número de onda principal esté en el origen (recordar que una transformada de una gaussiana centrada en $k=0$ es una gaussiana mientras que una gaussiana centrada en $k = k_0$ es función periódica modulada por una gaussiana. Luego resulta que:

$$u(x, t) = A(x - \partial_k \omega(k_0)t) \exp[i\omega_0 t - k_0 x] \quad (2.80)$$

es decir que si se cumplen condiciones de regularidad y el paquete está lo suficientemente localizado en el espacio de Fourier, la propagación del paquete puede ser expresada como una envolvente que se mueve con la velocidad de grupo por una función periódica que contiene la información de la fase. De esta manera la envolvente conserva su forma a lo largo del movimiento para un dado k_0 fijo, esto es consecuencia de tomar solo el primer orden en la relación de dispersión y por lo tanto despreciar los efectos dispersivos que aparecen en los órdenes superiores.

La velocidad con que se mueve la envolvente del disturbio la llamamos velocidad de grupo y resulta que

$$c_g = \partial_k \omega \quad (2.81)$$

Para que en la integral la frecuencia se pueda aproximar por los dos primeros términos del desarrollo de Fourier debe cumplirse que

$$\frac{\partial_t A}{A\omega(k_0)} \ll 1 \quad \frac{\partial_x A}{Ak_0} \ll 1 \quad (2.82)$$

2.7 Interacciones flujo medio-ondas

Ejercicio 2.9: Suponer ondas de gravedad internas en la aproximación hidrostática que se propagan en un flujo medio que depende de la altura $u_0(z)$.

1. Utilizar la aproximación WKB para encontrar las soluciones.

²Como se relaciona esto al hecho que se pide que el paquete de ondas sea lo suficiente localizado en el espacio físico pero debe contener varias longitudes de onda?

2. Encontrar la relación de dispersión, deducir como es la refracción.
3. ¿Cómo es la perturbación horizontal y la vertical cuando hay refracción hacia números de ondas verticales mayores?.
4. ¿Qué sucede con la solución en el caso en que la velocidad de fase horizontal de las ondas es igual a la del flujo medio $c_x = u_0(z)$?

2.8 Mecanismos de generación de las ondas

Los mecanismos de generación pueden ser divididos en tres categorías:

- Generación de ondas por forzado en las condiciones de contorno, por ejemplo ondas generadas por una membrana que vibra.
- Generación de ondas por interacción en el flujo medio, en este grupo incluimos a todas las ondas generadas por inestabilidades del flujo básico. Generación de ondas por términos de forzado de momento o fuentes calóricas provenientes de otras escalas (una tormenta como generadora de ondas de montaña, etc).
- Generación de ondas por no linealidades (e.g. otras ondas), interacción de triadas resonantes.

2.8.1 Ondas shallow-water generadas por topografía

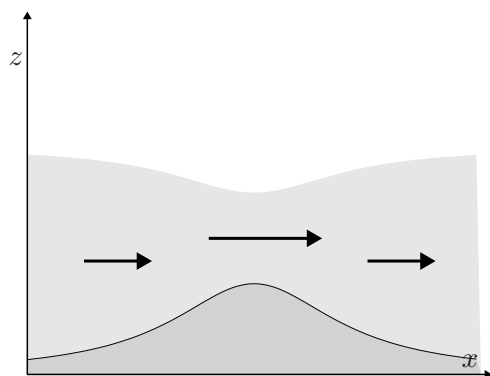


Figura 2.4: Problema de una capa de fluido que encuentra un obstáculo para el caso supercrítico $Fr > 1$.

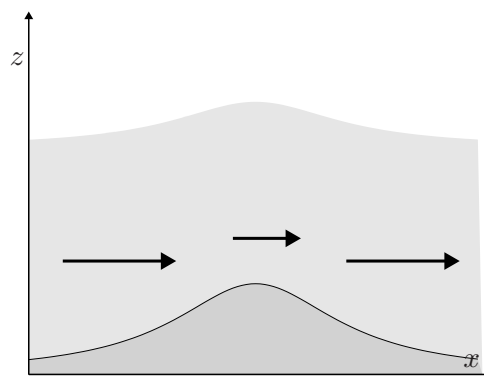


Figura 2.5: Problema de una capa de fluido que encuentra un obstáculo para el caso subcrítico $Fr < 1$.

Uno de los mecanismos mas importantes de generación de ondas es cuando un flujo básico barre un obstáculo $h_c(x)$ como se muestra en la figura ???. Supongamos en primera medida que el flujo básico es u_0 estático y tenemos un fluido de densidad constante ρ_0 .

Asumiendo la aproximación shallow-water podemos integrar en altura la ecuación de conservación de la masa, de manera similar al análisis en sección 2.2, en este caso la integración vertical tiene como condiciones de contorno a $w(-H + h_c) = D_t h_c$ y $w(\eta) = D_t \eta$.

Si el flujo básico es estático esperamos que las ondas generadas también sean estáticas esto implica que $\omega = 0$ luego, las ecuaciones de la perturbaciones de (2.35) serán

$$u_0 \partial_x u_1 = -g \partial_x \eta \quad (2.83)$$

$$u_0 \partial_x (\eta - h_c) + H \partial_x u_1 = 0 \quad (2.84)$$

Resultando la perturbación de la interface

$$\eta = -\frac{Fr^2}{1 - Fr^2} h_c \quad (2.85)$$

donde $Fr \equiv \frac{u_0}{c_{sw}}$ es el número de Froude, con $c_{sw} = \sqrt{gH}$.

La velocidad de las ondas estáticas viene dada por

$$u_1 = \frac{h_c}{H} \frac{u_0}{1 - Fr^2} \quad (2.86)$$

Existe dos casos cualitativamente distintos, $Fr > 1$ denominado caso supercrítico en el cual el fluido viene con una dada energía cinética y esta energía cinética es transformada en energía potencial al subir sobre el obstáculo para luego de pasar el obstáculo recuperar la energía cinética inicial. El otro caso es el denominado subcrítico $Fr < 1$ el fluido transforma parte de la energía potencial antes del obstáculo en energía cinética sobre el obstáculo y por lo tanto acelerandose y disminuyendo la profundidad para luego recuperar la energía potencial inicial.

El caso en el cual $Fr \approx 1$ no puede ser analizado en el límite lineal y se deben considerar los términos no-lineales (Durrán, 1990).

Si consideramos el caso no-lineal las ecuaciones son

$$u \partial_x u + g \partial_x h = 0 \quad (2.87)$$

$$\partial_x [u(h - h_c)] = 0 \quad (2.88)$$

donde h es la profundidad del fluido medida desde $-H$.

Multiplicando por u la ecuación de momento (2.87) y usando (2.88) se obtiene

$$[u^2 - g(h - h_c)] \partial_x u = -gu \partial_x h_c \quad (2.89)$$

Definiendo la velocidad de fase como $c^2 \equiv g(h_c - h)$ se obtiene

$$\partial_x u = \frac{gu}{c^2(1 - Fr^2)} \partial_x h_c \quad (2.90)$$

Luego notar que cuando tenemos un flujo subcrítico $Fr < 1$ pero cercano al caso crítico cuando nos arrimamos al obstáculo $h - h_c$ decrece mientras u crece, es decir que el $Fr = u/c$ esta creciendo y en algun momento puede resultar mayor que 1, en este caso tenemos que el flujo transformó energía potencial a energía cinética antes del obstáculo a través del mecanismo ya mencionado, pero en lugar de recuperar la energía potencial al momento en que la altura del obstáculo comienza a disminuir. Dado que el flujo ha cambiado a supercrítico sigue existiendo una conversión de energía potencial a cinética por lo cual tenemos velocidades muy altas en el lee side (sotavento) del obstáculo y además la profundidad del fluido es muy pequeña para

luego después del obstáculo volver a la situación normal, esto es lo que se denomina un *salto hidráulico*.

Este salto hidráulico se produce cuando hay una transición entre el flujo subcrítico a supercrítico.

Este es uno de los mecanismos que se ha propuesto para explicar los fuertes vientos que son observados en distintos lugares del planeta en el lee-side de las montañas, cuyos vientos son denominados bora (Yugoslavia), foehn (Francia), chinook (Estados Unidos) y zonda (Cuyo, Argentina).

Ejercicio 2.10: Suponga dos fluidos superpuestos de densidades constantes $\rho_2 > \rho_1$ con un flujo básico en ambos casos de u_0 , estos fluidos tienen cada uno una profundidad de H y como contorno inferior existe una superficie en forma de obstáculo $h_c(x)$ mientras sobre estos se encuentra un techo plano rígido. Resolver el sistema de ecuaciones resultante, ¿que tipo de modos son generados?, ¿cual es el efecto del contorno superior?, ¿cómo sería el modo equivalente en el caso de que no existiera contorno superior?.

Ejercicio 2.11: Considere un viento medio que depende de la altura $u_0(z)$ que barre un obstáculo $h_c(x)$ generando ondas internas en un fluido estratificado $\rho_0(z)$ con frecuencia de flotación constante N_0 . Exprese las características de las ondas en función del parámetro de Scorer que se define por $l^2 \equiv \frac{N_0^2}{u_0^2} - \frac{1}{u_0} \frac{d^2 u_0}{dz^2}$. Determine los parámetros de propagación de las ondas internas: relación de dispersión, velocidad de fase, de grupo, etc.

2.8.2 Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

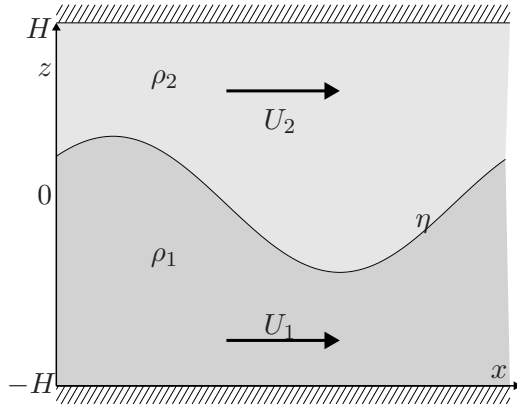


Figura 2.6: Problema de dos fluidos superpuestos con densidades ρ_1 y ρ_2 y con un techo. La capa de arriba tiene una velocidad U_2 y la de abajo U_1 .

Consideremos dos fluidos superpuestos con densidades constantes ρ_1 y ρ_2 en cada capa se tienen velocidades constantes U_1 y U_2 ^a. Como se muestra en Fig. 2.6. La presión total en la capa de arriba viene dada por

$$p = p_T(x, t) + \rho_2 g(H - z) \quad (2.91)$$

donde p_T es la presión en el techo, nótese que esta puede variar horizontal y temporalmente y debe ser considerada una variable mas del sistema como si tuvieramos una interface ahí.

^aNotar que se tienen velocidades tangenciales distintas las cuales son solo posibles en un fluido donde la viscosidad puede ser despreciada, esto solo puede ser considerado como un caso limite en el cual las velocidades cambian en una pequena capa.

En la capa de abajo, usando que la presión es continua en la interface η , se tiene

$$p = p_T(x, t) + \rho_1 g(H - \eta) + \rho_2 g(\eta - z) \quad (2.92)$$

Las ecuaciones en la capa de arriba son

$$\rho_1 D_{1t} u_1 = -\partial_x p_T \quad (2.93)$$

donde $D_{1t} = \partial_t + U_1 \partial_x$

$$D_{1t} \eta = H \partial_x u_1 \quad (2.94)$$

Las ecuaciones de abajo son dadas por

$$\rho_2 D_{2t} u_2 = -\partial_x p_T - (\rho_1 - \rho_2) g \partial_x \eta \quad (2.95)$$

$$D_{2t} \eta = -H \partial_x u_1 \quad (2.96)$$

Notar que como las velocidades horizontales son distintas entonces $w_1(\eta) \neq w_2(\eta)$ lo que si es cierto es que los desplazamientos verticales en la interface son iguales, *viz* $\zeta_1 = \zeta_2 = \eta$.

Eliminando u_1 de las ecuaciones arriba (2.93) y (2.94) se obtiene

$$\rho_1 D_{1tt}^2 \eta = -H \partial_{xx}^2 p_T \quad (2.97)$$

Equivalentemente, eliminando u_2 de las ecuaciones de la capa de abajo (2.95) y (2.96) para luego eliminar p_T entre las ecuaciones resultantes se obtiene

$$\rho_2 D_{2tt}^2 \eta + \rho_1 D_{1tt}^2 \eta - (\rho_2 - \rho_1) g H \partial_{xx}^2 \eta = 0. \quad (2.98)$$

Determinando las posibles velocidades de fase

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho_1 + \rho_2} \frac{c_{sw}^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2} \quad (2.99)$$

Lo interesante de esta “relación de dispersión” es que pueden aparecer casos en los cuales la velocidad de fase (o la frecuencia) puede ser imaginaria esto significa que tendremos una exponencial real que puede crecer con el tiempo! Esto es una inestabilidad, cualquier pequeño disturbio puede generar ondas y luego éstas comenzarán a crecer sacando energía del flujo medio. Si consideráramos que la energía cinética del flujo básico es finita y por lo tanto la velocidad del flujo medio puede cambiar entonces probablemente la diferencia entre las velocidades de las capas debería disminuir a medida que se radían ondas.

La condición para que exista inestabilidad viene dada para cuando el argumento de la raíz es negativo es decir,

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \frac{gH}{\rho_1 \rho_2} \quad (2.100)$$

En el caso en que $\rho_1 > \rho_2$ por supuesto también tendremos una inestabilidad pero en este caso estamos hablando de la inestabilidad convectiva.

Capítulo 3

Ajuste bajo gravedad y rotación

En el capítulo 2 hemos estudiado la respuesta del fluido en un campo gravitatorio a una perturbación ocasionada por causas externas, el fluido responde a este forzado externo distribuyendo la energía. Por ejemplo en un estanque los excesos de energía potencial son eliminados a través de ondas superficiales que se propagan hacia el infinito. En todo momento en el proceso de ajuste supusimos que el sistema de referencia era inercial.

Sin embargo la tierra esta rotando por lo cual si establecemos un sistema de referencia fijo en ella este no es un sistema inercial. En este sistema no-inercial se deben considerar fuerzas ficticias que equilibren la aceleración del sistema.

Una vez establecidas las ecuaciones de la evolución de un fluido en un sistema de coordenadas rotante, estudiaremos como ocurren los procesos de ajuste en estos sistemas los cuales difieren de forma notable del proceso de ajuste en sistemas no-rotante.

3.1 Sistemas de coordenadas rotantes

3.1.1 Razón de cambio de un vector en coordenadas rotantes

FALTA GRAFICO!

El cambio de la magnitud de un vector $\mathbf{A}$ que se encuentre rotando con velocidad angular constante Ω viene dado por

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \right| = |\mathbf{A}| \sin \phi \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (3.1)$$

donde $|\mathbf{A}| \sin \phi$ es la componente del vector $\mathbf{A}$ perpendicular a Ω . La dirección es perpendicular a $\mathbf{A}$ y Ω .

Por lo que en forma vectorial se deduce

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \Omega \times \mathbf{A} \quad (3.2)$$

Calculemos ahora el cambio de un vector $\mathbf{B}$ que se encuentra en un sistema de coordenadas que esta rotando con velocidad angular Ω . El vector $\mathbf{B}$ en el sistema rotante viene dado por $\mathbf{B} = B_j \mathbf{i}_j$ luego la razon de cambio en este sistema es

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_R = \frac{dB_j}{dt} \mathbf{i}_j \quad (3.3)$$

Si estamos en un sistema fijo no solo veremos que las componentes de $\mathbf{B}$ cambian sino tambien los versores debido a que estan en rotacion con respecto al sistema inercial por lo tanto

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_I = \frac{dB_j}{dt}\mathbf{i}_j + B_j\frac{d\mathbf{i}_j}{dt} \quad (3.4)$$

Usando (??), $\frac{d\mathbf{i}_j}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}_j$ luego si reemplazamos en (3.4) y teniendo en cuenta (3.3)

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} \quad (3.5)$$

Si ahora interpretamos a $\mathbf{B}$ como el vector posición de una partícula $\mathbf{r}$ se obtiene

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.6)$$

3.1.2 Razón de cambio de la velocidad en un sistema rotante

Si ahora pensamos en el vector velocidad $\mathbf{u}_I$ medida desde el sistema inercial, entonces su cambio viene dado por (3.5)

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I \quad (3.7)$$

Reemplazando (3.6) en (3.7)

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_I = \left[\frac{d(\mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt}\right]_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Asumiendo que la velocidad angular no cambia con el tiempo la expresión resultante es

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.9)$$

El segundo término $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R$ representa la aceleración de Coriolis notar que es en todo momento perpendicular a la velocidad.

FALTA GRAFICO!

El tercer término $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = -\Omega^2 \mathbf{R}$ es la aceleración centrípeta ($\mathbf{R}$ es el lado opuesto del triángulo que forma $\mathbf{r}$, el eje de rotación y la normal a este $\mathbf{R}$).

Luego reemplazando la aceleración centrípeta en (3.9) la razón de cambio de la velocidad en un sistema rotante puede ser expresada en la forma

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.10)$$

3.2 Ecuación de conservación de momento sobre la tierra

La desviación de esfericidad que posee la tierra hace que no exista componente tangencial de la aceleración centrípeta. Es decir que la única componente de la aceleración centrípeta es la normal a la superficie. Tenemos entonces que $\mathbf{g}^*$ la aceleración de la gravedad pura apunta hacia el centro de la tierra sin embargo esta no está exactamente en la dirección $\hat{k}$ (la dirección al centro no es perpendicular a la tangencial a la superficie debido a que la tierra es un esferoide).

La aceleración centrípeta sumada a la aceleración de la gravedad pura dan una aceleración de la gravedad efectiva (la fuerza de atracción que sentimos sobre la superficie de la tierra) y es esta gravedad efectiva la que está en la dirección $\hat{k}$, la cual es perpendicular a la superficie de la tierra,

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R} \quad (3.11)$$

Probablemente si uno considera a la tierra como un fluido que está rotando la configuración de equilibrio será el esferoide de lo contrario los elementos en la superficie no tienen equilibrio estático y estarían acelerados. Por lo que (especulando) esta sería la razón de que la tierra no es una esfera perfecta y es un esferoide.

Partiendo entonces de la ecuación de conservación del momento en un sistema inercial

$$\rho(D_t \mathbf{u})_I = -\nabla p + \rho \mathbf{g}^* \quad (3.12)$$

Luego queremos expresar la ecuación de conservación del momento en un sistema rotante que esté fijo sobre la tierra para esto reemplazamos la aceleración por la expresión de la aceleración en un sistema rotante (??) en (3.12) tenemos

3.3 Balance geostrofico